ГИДРОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЕННО-МОРСКИХ СИЛ

СПРАВОЧНИК ШТУРМАНА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск 1

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
НАЧАЛА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Издательство Гидрографического Управления ВМС
1948

ГИДРОГРАФИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЕННО-МОРСКИХ СИЛ

СПРАВОЧНИК ШТУРМАНА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск 1

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
НАЧАЛА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Издательство Гидрографического Управления ВМС
1 9 4 8

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
75	8 снизу	$a+c=b \quad d$	$a+c=b+d$
122	8 сверху	санного	описанного
126	7 снизу	оплскости	плоскости
вклейка между 134–135	последняя графа 10 снизу	угол C	угол B
	последняя графа 16 снизу	угол B	угол C
141	6 сверху	a', b и A	a', b' и A'
239	11 сверху	34. $(\operatorname{Ar}\operatorname{cth}\operatorname{sh} x)'$	34. $(\operatorname{Ar}\operatorname{sh} x)'$
246	14 сверху	$\underline{y}$ и y^1	y и y'
289	3 снизу	$x_0+\overline{2}$	$x_0+\frac{h}{2}$
293	6 снизу	$y-x=\overline{\cos x}$	$y-x=\frac{\varepsilon}{\cos x}$
293	8 снизу	$-\overline{(\sin x)}$ $-\frac{1}{6}\left(\overline{\sin x}\right)^2$	$-\frac{\varepsilon}{\sin x}$ $-\frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{\sin x}\right)^3$
308	2 снизу	$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d\tau^\circ}{ds}=kn^\circ=\frac{1}{R}$	$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d\tau^\circ}{ds}=kn^\circ=\frac{1}{R}n^\circ,$
317	1 снизу	$\operatorname{cth}(u\pm v)=\frac{\operatorname{cth} u\operatorname{cth} v\pm 1}{\operatorname{cth} u\pm\operatorname{cth}}$	$\operatorname{cth}(u\pm v)=\frac{\operatorname{cth} u\operatorname{cth} v\pm 1}{\operatorname{cth} u\pm\operatorname{cth} v}$
351	1 снизу	g (*м/сек*^{2})	g (*м/сек*$^{-2}$)

ПРЕДИСЛОВИЕ

„Справочник штурмана по математике" имеет целью сосредоточить в одном документе наиболее употребительные математические формулы, потребные штурману при работах в области навигации, мореходной астрономии, маневрирования, девиации, метеорологии и океанографии, а также при изучении штурманских, в частности электронавигационных, приборов.

Приводимые формулы снабжены краткими пояснениями и примерами их практического использования.

Кроме того, в Справочнике помещены формулы теоретической механики, теории ошибок и приближенных вычислений, также могущие понадобиться штурману при самостоятельной работе в различных отраслях кораблевождения.

Справочник издается в двух отдельных выпусках. Первый выпуск включает формулы элементарной и высшей математики, а во втором собраны формулы практической математики (теории ошибок, способа наименьших квадратов, приближенных вычислений, интерполирования), номографии и основные сведения по теоретической механике.

Настоящий, первый выпуск „Справочника штурмана по математике" составлен инженер-вице-адмиралом профессором Н. Н. Матусевичем, за исключением главы 3 отдела II, написанной капитаном 1 ранга А. И. Холодняком.

Редактирование произвел инженер-контр-адмирал профессор В. В. Каврайский, за исключением главы 3 отдела II, отредактированной инженер-вице-адмиралом Н. Н. Матусевичем.

Начальник Гидрографического Управления ВМС
капитан 1 ранга *Куликов.*

5 февраля 1948 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел I. **Элементарная математика** *Стр.*

Глава 1. Алгебра 7
Глава 2. Геометрия 59
Глава 3. Плоская тригонометрия 89
Глава 4. Сферическая тригонометрия 121
Глава 5. Аналитическая геометрия 149

Отдел II. **Начала высшей математики**

Глава 1. Дифференциальное и интегральное **исчисление** 235
Глава 2. Ряды 281
Глава 3. Векторная алгебра и начала **векторного анализа** 297
Глава 4. Гиперболические функции 313

Приложения

1. Математические и физические **постоянные** 329

СПИСОК ОБЩЕЙ СПРАВОЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ СПРАВОЧНИКА

1. Hütte. Das Ingenieurs Taschenbuch. 25 neubearbeitete **Auflage.**
2. Дэлл. Справочная книга по математике. ГТТИ. **Изд. 2-ое, Л.,** 1934, М.
3. Дуббель. Справочник по математике. **Изд. 7-ое, М., 1936, Л.** ОНТИ.
4. Физический словарь. Москва. ОНТИ, 1936.
5. Техническая энциклопедия. Москва, 1927.
6. Энциклопедический словарь Брокгауза-Эфрона.
7. The Encyclopaedia Britanica. Изд. 11-ое, 1909.

ОТДЕЛ I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Глава 1

АЛГЕБРА

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Стр.
§ 1.	Степени и корни	9
§ 2.	Алгебраические дроби	9
§ 3.	Деление двучленов	9
§ 4.	Соединения	10
§ 5.	Пропорции	11
§ 6.	Арифметическая прогрессия	11
§ 7.	Геометрическая прогрессия	12
§ 8.	Определители и решение линейных уравнений	12
§ 9.	Однородные уравнения первой степени	19
§ 10.	Исключение неизвестных из линейных уравнений	20
§ 11.	Непрерывные дроби	20
§ 12.	Неопределенные уравнения первой степени	24
§ 13.	Квадратные уравнения	27
§ 14.	Биквадратные, возвратные, или симметричные, уравнения	31
§ 15.	Однородные квадратные уравнения	32
§ 16.	Неравенства. Решение неравенства первой степени с одной переменной	33
§ 17.	Решение неравенства первой степени с двумя переменными	36
§ 18.	Решение системы неравенств с несколькими переменными	37
§ 19.	Неравенства второй степени и решение их	38
§ 20.	Бином Ньютона. Таблица биномиальных коэфициентов при разных показателях m	41
§ 21.	Комплексные величины	42
§ 22.	Зависимость между тригонометрическими и показательными функциями	45
§ 23.	Суммы разных степеней ряда натуральных чисел	45
§ 24.	Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$	46
§ 25.	Формула Эйлера	46
§ 26.	Двучленные и трехчленные уравнения	46
§ 27.	Уравнения 3-ей степени	47
§ 28.	Логарифмы	50
§ 29.	Таблицы логарифмов сумм и разностей	56

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселев. Алгебра.
2. Бертран (перевод Билибина). Алгебра. С.-Петербург. 1896.
3. Крыжановский. Элементы теории неравенств. ОНТИ, М., Л. 1936.
4. Сушкевич. Основы высшей алгебры. ОНТИ, М., Л. Изд. 3-ье. 1937.
5. Вебер и Вельштейн. Энциклопедия элементарной математики. Mathesis, Одесса, 1910.

§ 1. Степени и корни

Степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
4. $(a:b)^m = a^m : b^m$
5. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
6. $1 : a^m = (1:a)^m = a^{-m}$
7. $a^{-m} : b^{-n} = b^n : a^m$
8. $(-1)^n = \pm 1$ $\begin{cases} + \text{ при } n \text{ четном} \\ - \text{ при } n \text{ нечетном} \end{cases}$
9. $a^0 = 1$
10. $0^n = \begin{cases} 0 \text{ при } n > 0 \\ \infty \text{ при } n < 0 \end{cases}$
11. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
12. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
13. $(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$
14. $(a^k + b^k)^n = a^{kn}\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^k\right]^n$

Корни

15. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
16. $\sqrt[m]{a \times b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$
17. $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$
18. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$
19. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$
20. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
21. $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$
22. $\sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}} = a^{-\frac{mr}{ns}}$

§ 2. Алгебраические дроби

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ 2. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Освобождение знаменателей от радикалов.

1. $\frac{b}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$
2. $\frac{d}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{d(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b}$
3. $\frac{d}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}} = \frac{d\left(\sqrt{(a \mp \sqrt{b})(a^2-b)}\right)}{a^2-b}$
4. $\frac{d}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{d\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a \pm b}$

§ 3. Деление двучленов

1. Разность на разность делится всегда без остатка.

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \cdots + x^2a^{m-3} + xa^{m-2} + a^{m-1}$$

2. Разность четных степеней делится всегда без остатка на сумму первых степеней.

$$\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x+a}=x^{2m-1}-x^{2m-2}a+x^{2m-3}a^2-\ldots+xa^{2m-2}-a^{2m-1}$$

3. Сумма нечетных степеней делится всегда без остатка на сумму первых степеней.

$$\frac{x^{2m+1}+a^{2m+1}}{x+a}=x^{2m}-x^{2m-1}a+x^{2m-2}a^2-\ldots-xa^{2m-1}+a^{2m}$$

4. Сумма одинаковых степеней не делится на разность первых степеней.

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-3}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

§ 4. Соединения

Соединения могут быть трех видов: размещения, перестановки и сочетания.

1. Размещениями из общего количества элементов по нескольку называют такие соединения, которые отличаются одно от другого как самими элементами, так и их порядком. Общее число размещений из n элементов по k в группе обозначается символом A_n^k.

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1)$$

2. Перестановками из n элементов называют такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n, причем

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1=1.2.3\ldots n. \qquad (2)$$

Примечание. Произведение n первых чисел называют факториалом и сокращенно обозначают $n!$, т. е. $P_n=n!$ (2)*

3. Сочетаниями из общего числа элементов по нескольку называют такие соединения, которые отличаются друг от друга только самими элементами и в которых порядок элементов роли не имеет. Число сочетаний из n элементов по k обозначают знаком C_n^k, причем

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}. \qquad (3)$$

Число сочетаний C_n^k обозначают еще и таким образом, употребляя факториалы:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (3)*$$

или еще символически так (см. § 20):

$$C_n^k=\binom{k}{n}. \qquad (3)**$$

§ 5. Пропорции

Четыре величины a, b, c и d образуют пропорцию, если отношение двух первых (a и b) членов равно отношению двух вторых (c и d) членов, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Обозначения пропорций:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$ или $a:b::c:d$ (английское обозначение).

Первый a и четвертый d члены называются крайними, а второй b и третий c средними.

Свойства пропорций:

Если 1) $a:b=c:d$, то 2) $a\cdot d=b\cdot c$.

Справедливы также следующие пропорции:

3) $b:a=d:c$

4) $a:c=b:d$

5) $c:a=d:b$

6) $a+b:b=c+d:d$

7) $a+b:a=c+d:c$

8) $a-b:b=c-d:d$

9) $a-b:a=c-d:c$

10) $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

11) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Произведения соответствующих членов двух или более пропорций также составляют пропорцию, т. е.

если $a:b=c:d$ и $m:n=p:q$,

то 12) $am:bn=cp:dq$ или 13) $\frac{am}{bn}=\frac{cp}{dq}$.

Таким же образом умножение и деление обоих членов отношения на одно и то же число не изменяет пропорции, т. е.

если $a:b=c:d$, то 14) $ma:mb=nc:nd$ или 15) $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$.

Справедливы также следующие пропорции:

16) $a^n:b^n=c^n:d^n$ и 17) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

В случае ряда пропорций

$$a:b=c:d=e:f=g:h=\ldots$$

сумма первых (предыдущих) членов относится к сумме вторых (последующих) так же, как каждый из предыдущих относится к своему последующему, т. е.

18) $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\ldots$

§ 6. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется ряд величин, в котором каждое последующее равно предыдущему, сложенному с постоянным количеством r, которое называется разностью прогрессии.

Величина n-го члена прогрессии 1) $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Отсюда следуют такие формулы:

2) $u_1 = u_n - (n-1)r$; 3) $r = \frac{u_n - u_1}{n-1}$; 4) $n = 1 + \frac{u_n - u_1}{r}$.

Сумма членов арифметической прогрессии

5) $S = \frac{(u_1 + u_n)}{2} n$; $S = \frac{2u_1 + (n-1)r}{2} n$.

Если $r > 0$ — прогрессия возрастающая,
„ $r < 0$ „ убывающая.

Если между двумя числами a и b требуется вставить m средних арифметических, то это сводится к определению разности прогрессии r по формуле

6) $r = \frac{b-a}{m+1}$.

§ 7. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется ряд величин, в котором каждая последующая равна предыдущей, умноженной на постоянное число q, называемое знаменателем прогрессии.

Величина n-го члена прогрессии 1) $u_n = u_1 q^{n-1}$.
Отсюда следуют такие формулы:

2) $u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}$; 3) $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$; 4) $n = 1 + \frac{\lg u_n - \lg u_1}{\lg q}$.

Из величин u_1, u_n, q и n формул 1—4 определяют четвертую, когда заданы три других. Если надо вставить m средних геометрических между двумя данными числами a и b, то это сводится к определению знаменателя прогрессии q по формуле

5) $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

Сумма членов геометрической прогрессии

6) $S = \frac{u_n q - u_1}{q-1}$; $S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Если $q > 1$ прогрессия возрастающая,
„ $0 < q < 1$ „ убывающая,
„ $q < 0$ „ знако-переменная.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (при $q < 1$)

7) $S = \frac{u_1}{1-q}$.

§ 8. Определители и решение линейных уравнений

А. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= q_1 \\ a_2 x + b_2 y &= q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

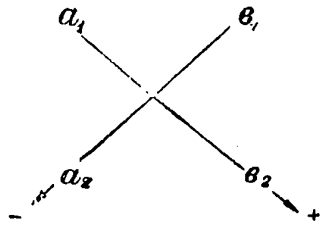
$$x = \frac{q_1 b_2 - q_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} q_1, b_1 \\ q_2, b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{a_1 q_2 - a_2 q_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1, q_1 \\ a_2, q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

Система (1) имеет одно решение, если выражение $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$ не равно нулю. Если же выражение $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то система (1) или вовсе не допускает решений, или допускает их бесчисленное множество, т. е. одно уравнение есть следствие другого.

Числители и знаменатели выражений для x и y называются определителями (детерминантами) второго порядка.

Как видно, определитель второго порядка вычисляют по следующему правилу:

надо написать таблицу (матрицу) определителя в форме



(А)

и взять произведение элементов, накрест лежащих: $a_1 \times b_2$ и $b_1 \times a_2$; первому произведению приписать знак +, а второму знак —; алгебраическая сумма этих членов даст величину определителя, который символически обозначают:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$$

Диагональ, идущая от левого верхнего угла к правому нижнему (от a_1 к b_2), называется главной диагональю; дополнительной или побочной называют диагональ, идущую от правого верхнего элемента к левому нижнему (от b_1 к a_2). Члену, соответствующему главной диагонали, приписывают знак +, а члену, соответствующему побочной диагонали, приписывают знак —. Число членов (слагаемых) в определителе 2-го порядка равно двум.

Таким образом, для решения двух уравнений с двумя неизвестными надо:

1. Составить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}$$

из коэфициентов при неизвестных x и y.

2. Составить определитель из написанного, но вместо коэфициентов при первой неизвестной x подставить свободные члены, т. е. составить определитель

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} q_1, b_1 \\ q_2, b_2 \end{vmatrix}$$

3. Неизвестная первая (x) равна отношению указанных определителей.

4. Составить определитель из основного, но вместо коэфициентов при второй неизвестной y подставить свободные члены, т. е. составить

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1, q_1 \\ a_2, q_2 \end{vmatrix}$$

5. Вторая неизвестная y равна отношению найденных определителей.

Пример.

$$2x-3y=1;\quad 5x+2y=12.$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1, & -3\\ 12, & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2, & -3\\ 5, & 2\end{vmatrix}}=\frac{1\times 2-(-3\times 12)}{2\times 2-(-3\times 5)}=\frac{2+36}{4+15}=\frac{+38}{+19}=+2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2, & 1\\ 5, & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2, & -3\\ 5, & 2\end{vmatrix}}=\frac{2\times 12-1\times 5}{2\times 2-(-3\times 5)}=\frac{24-5}{4+15}=\frac{+19}{+19}=+1.$$

Б. Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z&=q_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=q_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=q_3\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{q_1b_2c_3-q_1c_2b_3+c_1q_2b_3-b_1q_2c_3+b_1c_2q_3-c_1b_2q_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3}\\ y&=\frac{a_1q_2c_3-a_1c_2q_3+c_1a_2q_3-q_1a_2c_3+q_1c_2a_3-c_1q_2a_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3}\\ z&=\frac{a_1b_2q_3-a_1q_2b_3+q_1a_2b_3-b_1a_2q_3+b_1q_2a_3-q_1b_2a_3}{a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Эти формулы удобно записать в форме отношения определителей третьего порядка

$$x=\frac{\begin{vmatrix}q_1,b_1,c_1\\ q_2,b_2,c_2\\ q_3,b_3,c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1,b_1,c_1\\ a_2,b_2,c_2\\ a_3,b_3,c_3\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1,q_1,c_1\\ a_2,q_2,c_2\\ a_3,q_3,c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1,b_1,c_1\\ a_2,b_2,c_2\\ a_3,b_3,c_3\end{vmatrix}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}a_1,b_1,q_1\\ a_2,b_2,q_2\\ a_3,b_3,q_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1,b_1,c_1\\ a_2,b_2,c_2\\ a_3,b_3,c_3\end{vmatrix}}\qquad(4)^*$$

Сравнивая числители и знаменатели этих выражений, видно, как определители третьего порядка выражаются через произведения соответственных элементов таблицы (матрицы). Как видно, число членов в определителе 3-го порядка равно 6, т. е. числу перестановок из трех элементов.

При определении неизвестных, как видно, определители, стоящие в знаменателях выражений x, y и z, одинаковы и составлены из таблицы коэфициентов

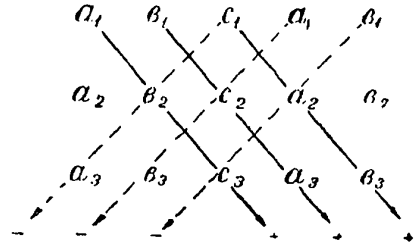
$$\begin{matrix}a_1,b_1,c_1\\ a_2,b_2,c_2\\ a_3,b_3,c_3\end{matrix}\qquad(B)$$

стоящих в заданных уравнениях при неизвестных. Каждый из определителей, стоящих в числителях, получается путем замены в основном определителе коэфициентов, стоящих при соответственном неизвестном свободными членами заданных уравнений.

Правило, указанное для составления определителей при решении системы двух уравнений, остается в силе для случая трех уравнений.

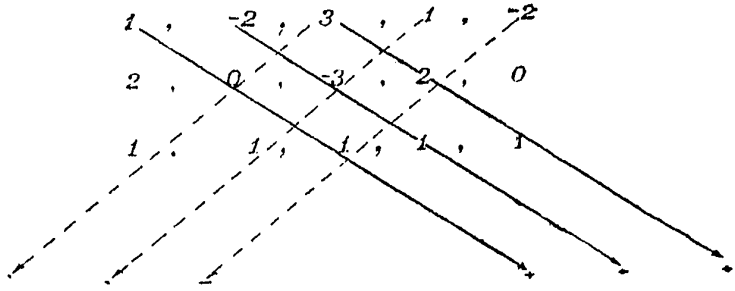
Уравнения (3) имеют одно решение, если определитель Δ не равен нулю. Если же определитель Δ равен нулю, то система (3) или вовсе не имеет решений, или допускает их бесчисленное множество; в первом случае система уравнений (3) несовместна, а во втором случае (если решений бесчисленное количество) система (3) будет неопределенная, т. е. одно из уравнений (3) есть следствие двух других.

Правило Саррюса (F. P. Sarrus) для вычисления определителей 3-го порядка. Припишем к таблице (B) (матрица) с правой стороны два первые столбца ее и проведем главную диагональ $a_1 - b_2 - c_3$ (сплошная) и дополнительную $c_1 - b_2 - a_3$ (пунктирная); затем проводим еще по две диагонали через буквы b_1 и c_1 (сплошные) параллельно основной и через буквы a_1 и b_1 параллельно дополнительной; произведения, соответствующие главной диагонали, имеют знаки +; произведения, соответствующие дополнительной, имеют знаки —. Алгебраическая сумма шести этих членов дает как раз величину определителя 3-го порядка.



Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1, & -2, & 3 \\ 2, & 0, & -3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(B)}^*$$



$$1 \times 0 \times 1 = 0 \qquad 3 \times 0 \times 1 = 0$$
$$-2 \times -3 \times 1 = +6 \qquad 1 \times -3 \times 1 = -3$$
$$3 \times 2 \times 1 = +6 \qquad -2 \times 2 \times 1 = -4$$
$$\Delta = 0 + 6 + 6 - 0 + 3 + 4 = +19$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x \quad\quad - 3z &= 3 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3 \\ 3, & 0, & -3 \\ 6, & 1, & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{+57}{+19} = +3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1, & 2, & 3\\ 2, & 3, & -3\\ 1, & 6, & +1\end{vmatrix}}{19}=\frac{+38}{+19}=+2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1, & -2, & 2\\ 2, & 0, & 3\\ 1, & 1, & 6\end{vmatrix}}{19}=\frac{+19}{+19}=+1$$

В. Определители n-го порядка

При решении системы n линейных уравнений с n неизвестными приходится пользоваться определителями n-го порядка. Общий вид определителя n-го порядка таков:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1,b_1,c_1 & \dots & l_1\\ a_2,b_2,c_2 & \dots & l_2\\ a_3,b_3,c_3 & \dots & l_3\\ \dots & \dots & \dots\\ a_n,b_n,c_n & \dots & l_n\end{vmatrix} \qquad (5)$$

Этот определитель можно представить в виде суммы $1.2.3.\dots n=P_n$ членов, где P_n—число перестановок из n элементов

$$\Delta=\sum \pm a_\alpha b_\beta c_\gamma \dots l_\lambda, \qquad (5)^*$$

причем знак, стоящий перед каждым членом, определяется числом инверсий в перестановке индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$.

Инверсией называется такое расположение индексов $1, 2, 3, 4, \dots n$, при котором за высшим индексом следует низший. Знак $+$ в формуле $(5)^*$ соответствует четному числу инверсий, а знак — соответствует нечетному числу их. Число положительных членов в определителе равно числу отрицательных. Члены со знаком $+$ могут быть получены из главного члена определителя

$$a_1 b_2 c_3 \dots l_n$$

посредством четного числа перестановок индексов $1, 2, \dots n$; члены, перед которыми стоит знак —, могут быть получены из главного числа посредством нечетного числа перестановок индексов.

Г. Определители-миноры и разложение определителя по элементам какой-нибудь строки или столбца

Выражение для определителя 3-го порядка можно написать так:

$$\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1). \qquad (6)$$

Множители при a_1, a_2 и a_3 называются определителями-минорами. Написанное выражение представляет собой разложение определителя 3-го порядка по элементам первого столбца; множители при элемен-

тах a_1, a_2, a_3 первого столбца получаются из таблицы (B) вычеркиванием первого столбца и последовательно всех строк. Например, так:

$$\text{при } a_1 \begin{vmatrix} \cancel{a_1 b_1 c_1} \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - b_3 c_2$$

$$\text{при } a_2 \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ \cancel{a_2 b_2 c_2} \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = b_1 c_3 - b_3 c_1$$

$$\text{при } a_3 \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ \cancel{a_3 b_3 c_3} \end{vmatrix} = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

Правило знаков при определителях-минорах: если элемент расположен в p-ой строке и в m-ом столбце, то знак при соответствующем определителе-миноре будет $(-1)^{p+m}$. Так, в приведенном выше разложении знаки при определителях-минорах будут:

при a_1 $(-1)^{1+1} = +$
при a_2 $(-1)^{1+2} = -$
при a_3 $(-1)^{1+3} = +$

Основной определитель можно разложить по элементам любого столбца или любой строки.

Разложение основного определителя по элементам какой-нибудь строки или столбца и употребление определителей-миноров дает общий способ вычисления определителя. Но если определитель выше 3-го порядка, то определители-миноры будут выше 2-го порядка и вычисление определителя делается сложным. Для упрощения вычислений пользуются следующими свойствами определителей:

1. Величина определителя не изменится, если столбцы заменить строками или наоборот.

2. Если все элементы какого-нибудь столбца или строки равны нулю, то определитель равен нулю.

3. Если все элементы какого-нибудь столбца и строки равны нулю, кроме одного, то определитель равен произведению из этого элемента на определитель-минор, соответствующий этому элементу. Знак определителя-минора получается по указанному выше правилу.

Так, например:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, 0 \\ a_2, b_2, c_2, 0 \\ a_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, c_4, 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} d_3 \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix}$$

4. Если переменить местами два каких-либо столбца или строки, то определитель изменит знак. Нечетное число таких перестановок меняет знак определителя; четное число их знака определителя не меняет.

5. Если в определителе имеется два одинаковых или пропорциональных столбца или строки, то такой определитель равен нулю.

6. Если все элементы какого-либо столбца (строки) умножить на постоянное число m, то определитель увеличится в m раз.

7. Если каждый элемент одного из столбцов (строки) представить в виде суммы двух членов, то данный определитель можно заменить суммой двух таких определителей того же порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1+b_1, c_1 \\ a_2 & \alpha_2+b_2, c_2 \\ a_3 & \alpha_3+b_3, c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}$$

8. Если умножить каждый элемент какой-нибудь строки (столбца) на одну и ту же величину и произведение придать (или вычесть) к соответствующим элементам другого столбца (строки), то определитель не изменит своей величины.

Пользуясь указанными свойствами определителей, вычисление их делается следующим приемом: надо обратить в нули все элементы какого-нибудь столбца (строки), кроме одного; этим понижается порядок определителя на единицу. Продолжая этот процесс, можно дойти до определителя 2-го порядка, вычисление которого не представляет затруднений.

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 5, & 1 \\ 1, & 4, & 6, & 3 \\ 4, & 2, & 7, & 4 \\ 3, & 1, & 2, & 5 \end{vmatrix}$$

а) Умножим первую строчку на 4 и сложим произведение со второй строчкой.

б) Умножим первую строчку на 2 и сложим произведение с третьей.

в) Сложим первую строчку с четвертой, тогда получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 5, & 1 \\ 9, & 0, & 26, & 7 \\ 8, & 0, & 17, & 6 \\ 5, & 0, & 7, & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9, & 26, & 7 \\ 8, & 17, & 6 \\ 5, & 7, & 6 \end{vmatrix}$$

Вычитая элементы третьего столбца из первого, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 26, & 7 \\ 2, & 17, & 6 \\ -1, & 7, & 6 \end{vmatrix}$$

Умножив последнюю строку на 2 и складывая произведение с первой и второй строчками, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & 40, & 19 \\ 0, & 31, & 18 \\ -1, & 7, & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 40, & 19 \\ 31, & 18 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 40, & 19 \\ 31, & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= -(40\times 18 - 19\times 31) = -(720 - 589) = -131.$$

Таким образом, величина заданного определителя равна -131.

Д. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными

Дана система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+l_1t=q_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+l_2t=q_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+l_3t=q_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+l_nt=q_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Решение этой системы (7) определяется следующими формулами:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}\ldots\quad t=\frac{\Delta_t}{\Delta} \qquad (8)$$

Здесь определитель Δ, стоящий в знаменателе, называемый определителем данной системы (7) уравнений, составлен из коэфициентов при неизвестных и равен:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1,b_1,c_1\ldots l_1 \\ a_2,b_2,c_2\ldots l_2 \\ a_3,b_3,c_3\ldots l_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n,b_n,c_n\ldots l_n \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Определители $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z\ldots\Delta_t$, стоящие в числителях формулы (8), получаются из определителя данной системы (7) заменой столбцов из коэфициентов при неизвестных свободными членами, т. е.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} q_1,b_1,c_1\ldots l_1 \\ q_2,b_2,c_2\ldots l_2 \\ q_3,b_3,c_3\ldots l_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ q_n,b_n,c_n\ldots l_n \end{vmatrix};\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1,q_1,c_1\ldots l_1 \\ a_2,q_2,c_2\ldots l_2 \\ a_3,q_3,c_3\ldots l_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n,q_n,c_n\ldots l_n \end{vmatrix}\ldots\Delta_t=\begin{vmatrix} a_1,b_1,c_1\ldots q_1 \\ a_2,b_2,c_2\ldots q_2 \\ a_3,b_3,c_3\ldots q_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n,b_n,c_n\ldots q_n \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Если определитель Δ не равен нулю, то система (7) имеет одно определенное решение. Если же определитель $\Delta=0$, то система (7) или вовсе не имеет решений, или допускает их бесчисленное множество; в первом случае система (7) несовместна, а во втором случае (если решений бесчисленное множество) система будет неопределенная, т. е. одно или несколько уравнений являются следствием других.

§ 9. Однородные уравнения первой степени

Однородными уравнениями называют линейные уравнения, у которых свободные члены равны нулю. Общий вид таких уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+l_1t=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+l_2t=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+l_3t=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+l_nt=0 \end{array}\right\}$$

Такая система всегда допускает по крайней мере одно решение

$$x=y=z=\ldots=t=0,$$

так называемое нулевое решение.

Если определитель Δ системы (А), составленный из коэфициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \dots l_1 \\ a_2, b_2, c_2 \dots l_2 \\ a_3, b_3, c_3 \dots l_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_n, b_n, c_n \dots l_n \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то система (А) имеет единственное решение нулевое. Чтобы система (А) имела решения, отличные от нулевых, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ равнялся нулю.

§ 10. Исключение неизвестных из линейных уравнений

Чтобы из $n+1$ однородных уравнений исключить n букв, можно определить значения этих букв, например из n первых уравнений, и найденные значения их подставить в последнее уравнение; полученное выражение и представит собой результат искомого исключения. Но для этой цели нет необходимости выполнять указанное решение n уравнений, а достаточно написать, что определитель $(n+1)$-го порядка, составленный из множителей при тех буквах, которые следует исключить, и свободных членов, равен нулю.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1y_1) и (x_2y_2) (см. гл. 5, § 2, форм. 13**).

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$y - ax - b = 0.$$

Параметры a и b надо определить из условия, что эта прямая проходит через точки (x_1y_1) и (x_2y_2), т. е. из уравнений:

$$y_1 - ax_1 - b = 0;\ y_2 - ax_2 - b = 0,$$

которые надо решить относительно букв a и b, принимаемых за неизвестные, и значения их подставить в первое уравнение.

В результате получим выражение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y, & -x, & 1 \\ y_1, & -x_1, & 1 \\ y_2, & -x_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или в обычной форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

так как множители при букве a будут x, x_1 и x_2, при букве b единицы, а y, y_1 и y_2 в этом решении (относительно букв a и b) играют роль свободных членов.

§ 11. Непрерывные дроби

Непрерывной дробью называют выражение вида:

$$X = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Числа a_0, a_1, a_2, a_3 ... суть целые положительные и называются частными непрерывной дроби.

Дроби $\frac{a_0}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ ... называются звеньями или составляющими дробями. Непрерывная дробь будет конечной, если число звеньев конечное, и бесконечной, если число звеньев бесконечно.

Всякая рациональная дробь может быть выражена в виде конечной непрерывной дроби; иррациональная дробь может быть представлена только в виде бесконечной непрерывной дроби.

Периодической непрерывной дробью называют такую дробь, у которой частные $a_1, a_2, a_3, \ldots$ периодически повторяются в том же самом определенном порядке. Непрерывную дробь сокращенно обозначают иногда так:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots),$$

причем первое число a_0 обозначает целую часть дроби, которая, конечно, может быть и равной нулю.

А. Обращение конечной непрерывной дроби в обыкновенную

Для этого достаточно произвести все указанные в изображаемой непрерывной дроби действия в обратном порядке от последнего звена. Например, обратить конечную непрерывную дробь в обыкновенную.

$$X=(2,3,1,4)=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{5}{4}}}=2+\cfrac{1}{3+\frac{4}{5}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{\frac{19}{5}}=2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}.$$

Б. Обращение обыкновенной дроби в непрерывную

Дана рациональная дробь $A:B$; выделим целую часть a_0 и пусть

$$\frac{A}{B}=a_0+\frac{r}{B}=a_0+\cfrac{1}{\frac{B}{r}},$$

где r — остаток от деления A на B. Если $A:B$ правильная дробь, то $a=0$ и $\frac{A}{B}=\cfrac{1}{\frac{B}{A}}$. Делим B на r и, обозначая через a_1 частное и r_1 остаток, получим

$$\frac{B}{r}=a_1+\frac{r_1}{r}=a_1+\cfrac{1}{\frac{r}{r_1}}.$$

С дробью $r:r_1$ продолжаем тот же процесс до тех пор, пока не дойдем до остатка, равного нулю, и частного a_n и тогда получим

$$\frac{A}{B}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Для практического решения задачи удобно последовательные деления располагать в следующем порядке: обратить $\frac{40}{17}$ в непрерывную дробь.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
 & & & & & 40 & 17 \\ \cline{6-7}
 & & & & 17 & 6 & 2 \\ \cline{5-7}
 & & & 6 & 5 & 2 & \\ \cline{4-7}
 & & 5 & 1 & 1 & & \\ \cline{3-7}
0 & 5 & & & & &
\end{array}$$

и таким образом $\frac{40}{17} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$

Если дробь $A:B$ есть число иррациональное, то указанный процесс можно продолжать неопределенно.

В. Подходящие дроби

В непрерывной дроби

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

первая подходящая дробь есть $\frac{3}{1}$,

вторая „ „ „ $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

третьи „ „ „ $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{10}{3}$,

четвертая „ „ „ $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{27}{8}$ точное значение данной дроби.

Обозначим последовательные подходящие дроби через:

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \ldots\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}};$$

соответствующие им частные пусть будут:

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\qquad a_{n-2},\quad a_{n-1},\quad a_n.$$

Тогда общая форма для $(n+1)$-й подходящей дроби такова:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Пример. Вычислить все 7 подходящих дробей непрерывной дроби.

$$X = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}}$$

Вычисление удобно расположить по такой схеме:

№ подходящей дроби	I	II	III	IV	V	VI	VII
Частные a_i	2	1	3	2	3	1	5
P_i	2	3	11	25	86	111	641
Q_i	1	1	4	9	31	40	231

Точное значение непрерывной дроби заключается между двумя последовательными подходящими дробями, причем оно ближе к последующей, чем к предыдущей. Обозначая через X точное значение непрерывной дроби, имеем:

$$X > \frac{P_1}{Q_1},\quad X < \frac{P_2}{Q_2},\quad X > \frac{P_3}{Q_3},\quad X < \frac{P_4}{Q_4} \text{ и т. д.}$$

Разность между двумя рядом стоящими подходящими дробями n-ой и $(n-1)$-ой равна $(-1)^n$, деленной на произведение знаменателей этих подходящих дробей, т. е.

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n \cdot Q_{n-1}}.$$

Если вместо точной величины непрерывной дроби взять подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то допускаемая при этом ошибка меньше каждого из следующих чисел:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}},\quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

Г. Приложение непрерывных дробей

а) Извлечение квадратного корня. Извлечь квадратный корень из 17. Вычисления понятны из приводимых ниже выкладок.

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x};\quad \frac{1}{x} = \sqrt{17} - 4;\quad x = \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16} = \frac{\sqrt{17}+4}{1}.$$

$$x = \frac{\sqrt{17}+4}{1} = 8 + \frac{1}{y};\quad \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{17}+4}{1} - 8 = \frac{\sqrt{17}-4}{1};$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16} = \frac{\sqrt{17}+4}{1} = 8 + \frac{1}{y} \text{ и т. д.;}$$

таким образом $\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cdots}}}}$.

Так как $\sqrt{17}$ есть число иррациональное, то непрерывная дробь будет бесконечная. Приближенные значения этого числа будут подходящие дроби:

$$P_1=4,\ P_2=33,\ P_3=33\times 8+4=268,\ P_4=268\times 8+33=2177,$$
$$Q_1=1,\ Q_2=8,\ Q_3=8\times 8+1=65,\ Q_4=65\times 8+8=528.$$

Таким образом, приближенно

$$\sqrt{17}=\frac{2177}{528}=4{,}123106\ldots \quad \text{с ошибкой} < \frac{1}{528^2}=0{,}0000036.$$

Более точное вычисление даст $\sqrt{17}=4{,}1231056\ldots$

б) Цикл Метона. Продолжительность тропического года $T=365{,}2422$ ср. суток, а средняя продолжительность синодического оборота Луны $C=29{,}5306$ ср. суток. Определить продолжительность цикла Луны, т. е. периода, по прошествии которого все фазы этого светила повторяются снова в прежние дни года. Этот период определяется решением неопределенного уравнения

$$Tx=Cy.$$

Обратив отношение $\frac{x}{y}=\frac{C}{T}$ в непрерывную дробь, найдем:

$$\frac{C}{T}=\frac{29.5306}{365.2422}=\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}$$

Составляя последовательные подходящие дроби, получим:

$$\frac{C}{T}=\left|\ \underset{1\text{-я}}{\frac{1}{12}}\ \middle|\ \underset{2\text{-я}}{\frac{2}{25}}\ \middle|\ \underset{3\text{-я}}{\frac{3}{37}}\ \middle|\ \underset{4\text{-я}}{\frac{8}{99}}\ \middle|\ \underset{5\text{-я}}{\frac{11}{136}}\ \middle|\ \underset{6\text{-я}}{\frac{19}{235}}\ \right|.$$

Остановившись на 6-й подходящей дроби, определим, что

$$19\,T=235\,C,$$

т. е. в 19 тропических годах содержится 235 синодических оборотов Луны. Этот период был установлен за 400 лет до нашей эры в Греции Метоном.

§ 12. Неопределенные уравнения первой степени

Если число уравнений меньше числа неизвестных, то такая система имеет бесчисленное множество решений. Такие уравнения называют неопределенными.

Общий вид неопределенного уравнения первой степени таков:

$$ax+by=q, \qquad (1)$$

где коэфициенты a и b и свободный член q не имеют общего делителя. Если же a и b имеют общий делитель, которого не имеет свободный член q, то неопределенное уравнение (1) не имеет целых решений. Если числа a и b взаимно простые, то решения уравнения (1) выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 - at \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь x_0 и y_0 — два каких-либо целых числа, удовлетворяющие уравнению (1); t — любое целое положительное или отрицательное число или ноль.

Для определения двух каких-либо корней x_0 и y_0 неопределенного уравнения можно применять один из двух приемов.

а) Способ подстановки. Если $a < b$, то, решив уравнение (1) относительно x, найдем:

$$x = \frac{q - by}{a}.$$

Давая y последовательно значения 0, 1, 2, 3,..., найдем такое значение $y = n$, при котором числитель $q - by$ разделится нацело на a и даст в частном некоторое число m, тогда $x = m$ и $y = n$ дают одно из решений уравнения (1).

Пример. Дано уравнение: $7x - 4y = 2$.

Так как коэфициент при y меньший, то определяем y.

$$y = \frac{7x - 2}{4}.$$

Давая x последовательно значения 0, 1, 2, 3,..., получаем:

$$\begin{aligned} x &= \quad 0, \quad 1, \quad 2, \\ y &= -\frac{1}{2}, +\frac{5}{4}, \quad 3, \end{aligned}$$

т. е. $x = +2$ и $y = +3$ будут целые решения данного уравнения. Общие решения имеют форму:

$$x = 2 + 4t; \; y = 3 + 7t.$$

б) Способ использования непрерывных дробей. Обратим дробь $\frac{a}{b}$ в непрерывную и найдем предпоследнюю $(n-1)$ подходящую дробь (n-я подходящая дробь будет точным значением рациональной дроби $\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}$).

Согласно формуле разности (стр. 23), можно написать:

$$\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{b \cdot Q_{n-1}}$$

или, умножив обе части на $b \cdot Q_{n-1}$, найдем:

$$a \cdot Q_{n-1} - b P_{n-1} = (-1)^n,$$

умножая обе части еще на свободный член $q(-1)^n$, будем иметь:

$$a(qQ_{n-1}(-1)^n) + (-qP_{n-1}(-1)^n) = q. \qquad (3)$$

Поэтому числа $qQ_{n-1}(-1)^n$ и $qP_{n-1}(-1)^n$ дают решение неопределенного уравнения (1), т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= qQ_{n-1}(-1)^n \\ y_0 &= -qP_{n-1}(-1)^n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Например, решая этим способом предыдущее уравнение, надо сначала привести его к виду (1), т. е. написать:

$$7x + 4(-y) = 2.$$

Теперь, обратив $\frac{7}{4}$ в непрерывную дробь, получим:

$$\frac{7}{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$$

$(n-1)$-я подходящая (предпоследняя дробь), т. е. вторая, равна:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}$$

и по формулам (4) имеем:

$$x_0 = 2 \times 1 \times (-1)^3 = -2; \quad -y_0 = -2 \times 2 \times (-1)^3 = +4.$$

Поэтому общее решение будет:

$$x_0 = -2 - 4t; \quad y = -4 - 7t.$$

Положив здесь $t = -1$, получим $x = +2$ и $y = +3$ вышенайденные частные решения.

Пример. $43x + 15y = 8$. Имеем сначала

$$\frac{43}{15} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}$$

$(n-1)$-я подходящая дробь (третья) равна $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_3}{Q_3} = \frac{20}{7}$, поэтому

$$x_0 = 8 \times 7(-1)^4 = +56,$$
$$y_0 = -8 \times 20(-1)^4 = -160.$$

Общее решение имеет вид:

$$x = 56 - 15t; \quad y = -160 + 43t.$$

Положительные решения

Если коэфициенты при неизвестных a и b неопределенного уравнения (1) имеют знаки, противоположные знаку свободного члена q, то уравнение (1) не имеет положительных решений. Положительные решения получаются из решения неравенств:

$$x_0 + bt > 0 \text{ и } y_0 - at > 0. \quad (5)$$

Считая всегда коэфициент $a > 0$, имеем здесь три возможных случая:

1. Неравенства (5) одинакового смысла; в этом случае $b < 0$, и уравнение (1) допускает бесчисленное множество целых и положительных решений.

2. Неравенства (5) противоположного смысла и противоречат одно другому; в этом случае уравнение (1) не имеет положительных решений.

3. Неравенства (5) противоположного смысла и не противоречат одно другому; уравнение (1) имеет столько целых и положительных решений, сколько целых чисел для t допускают неравенства (5).

§ 13. Квадратные уравнения

А. Общий вид квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Корни этого уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + (c-a)^2 - (c+a)^2}}{2a} \tag{2}$$

Последнее выражение позволяет пользоваться таблицами квадратов.

Разделив коэфициенты на a, можно представить квадратное уравнение в виде:

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}^*$$

Корни его будут:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{2}^*$$

Свойства корней квадратного уравнения

Сумма корней

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p. \tag{3}$$

Произведение корней

$$x \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q. \tag{4}$$

Б. Таблица исследования корней квадратного уравнения

1. $b^2 - 4ac > 0$ . . . —оба корня вещественные и неравные.

$c > 0$ { $b < 0$ — оба корня положительные,
$b > 0$ — „ „ отрицательные.

$c = 0$ { один корень $= 0$,
другой корень $= -\frac{b}{a}$.

$c < 0$ —оба корня разных знаков.

2. $b^2 - 4ac = 0$ . . . —оба корня вещественные и равны:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

левая часть уравнения представляет полный квадрат.

3. $b^2 - 4ac < 0$ . . . -оба корня мнимые и сопряженные:

$$x_1 = \alpha - \beta i \quad \text{и} \quad x_2 = \alpha + \beta i. \tag{5}$$

Если знаки a и b разные, то корни уравнения (1) всегда вещественные. Если x_1 и x_2 корни уравнения (1), то трехчлен ax^2+bx+c может быть разложен на два множителя первой степени:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{6}$$

В. Тригонометрическое решение квадратных уравнений

1-й случай

$$x^2 \pm px - q = 0, \quad p \text{ и } q \text{ положительные.}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2}p}, \qquad \theta < 90°. \tag{7}$$

$$x_1 = \pm \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sqrt{q}, \qquad x_2 = \mp \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sqrt{q}. \tag{8}$$

2-й случай

$$x^2 \pm px + q = 0, \quad p \text{ и } q \text{ положительные.}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2}p}, \quad \theta < 90°. \tag{7}*$$

$$x_1 = \mp \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sqrt{q}, \qquad x_2 = \mp \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sqrt{q}. \tag{8}*$$

В случае мнимых корней $\sin\theta$ оказывается >1, так как в этом случае $\sqrt{q} > \frac{p}{2}$, тогда

$$\cos\psi = \mp\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{q}}, \qquad \psi \text{ от } 0° \text{ до } 180° \tag{7}**$$

и корни будут

$$x = \sqrt{q}(\cos\psi \pm i\sin\psi) = \sqrt{q}\, e^{\pm i\psi}. \tag{8}**$$

Г. Графические способы определения корней квадратного уравнения

I способ

Возьмем прямоугольные оси координат; по оси Y в положительном направлении отложим отрезок OA, равный 1, и отрезок $OE = c:a$. По свойству корней квадратного уравнения $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$. По теореме геометрии произведение секущих OA и OE должно быть равно произведению секущих OD и OF некоторой окружности радиуса r, центр которой находится в точке C (рис. 1).

$$x_c = \frac{1}{2}(x_1+x_2) = -\frac{b}{2a}; \qquad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+1\right) = \frac{c+a}{2a}.$$

Радиус равен

$$r = \frac{\sqrt{b^2-(c-a)^2}}{2a},$$

отрезок

$$DK = KF = \xi = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

поэтому

$$OD_1 = x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$OF = x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Таким образом, сначала находим координаты центра окружности x_c и y_c и так как эта окружность должна проходить через точку A с координатами $(0, +1)$, то, поставив одну ножку циркуля в точку C, а другую в точку A, засекаем ось X полученным растворением циркуля. Абсциссы точек пересечения будут искомыми корнями квадратного уравнения.

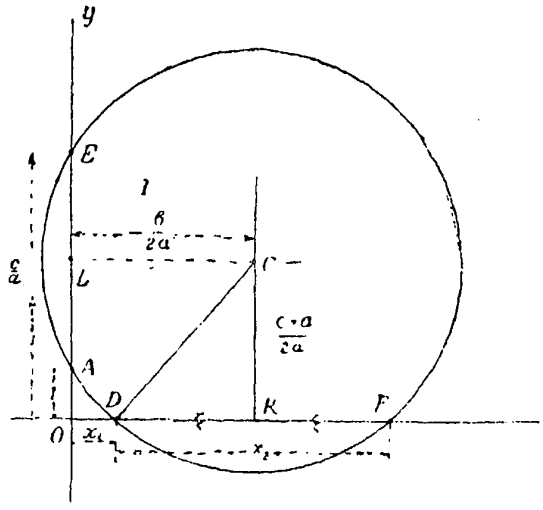


Рис. 1.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$a = 1,\ b = -6,\ c = 5.$

$x_c = +3,\ y_c = +3.$

На рис. 2 наносим точку C по этим данным и засекаем ось X. Корни будут:

$x_1 = +1;\quad x_2 = +5.$

II способ

Уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)^*$$

можно заменить двумя:

$y_1 = x^2$ (парабола);

$y_2 = -px - p$ (прямая).

Абсциссы точек пересечения параболы $y_1 = x^2$ и прямой $y_2 = -px - q$ и дадут искомые корни уравнения $(1)^*$.

Для этого решения надо начертить раз навсегда одну параболу, а для каждого частного уравнения проводить прямую по заданным коэфициентам $-p$ и $-q$.

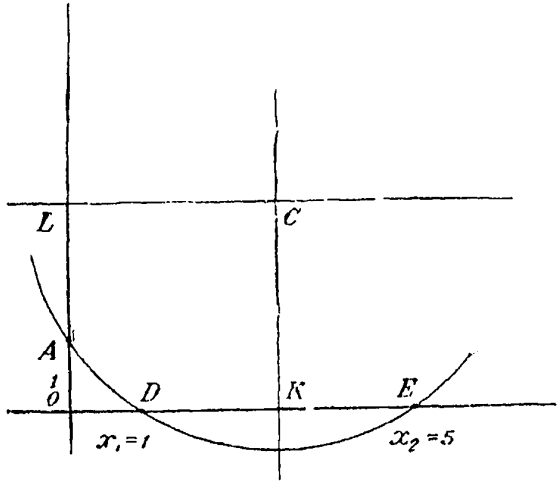


Рис. 2.

Пример. Решить уравнение:

$$x^2 - 0{,}5x - 7{,}5 = 0.$$

Уравнение прямой $y_2 = 0{,}5x + 7{,}5$. Через точку D (0; 7,5) проводим*)

*) Можно провести прямую EF в данном случае и не пользуясь транспортиром и таблицами тангенсов, так: $AC = 10$; $CB = 5$ и потом $EDF \parallel AB$. При другом значении коэфициента p построение отрезка CB по таблице тангенсов не представит труда.

прямую EF под углом $26{,}5° = \operatorname{arc\,tg} 0{,}5$. Абсциссы точек пересечения этой прямой с параболой (рис. 3) равны $-2{,}5$ и $+3{,}0$. Это и будут корни заданного уравнения.

Если прямая $y_2 = -px - q$ касается параболы, то корни квадратного уравнения равные и равны абсциссе точки касания.

Если прямая не пересекает параболы, то корни мнимые.

III способ

Наиболее быстро приближенные значения корней квадратного уравнения получаются помощью номограммы (рис. 4).

Ключ к номограмме показан пунктирными линиями на рис. 4 и пользование номограммой понятно из приводимых примеров.

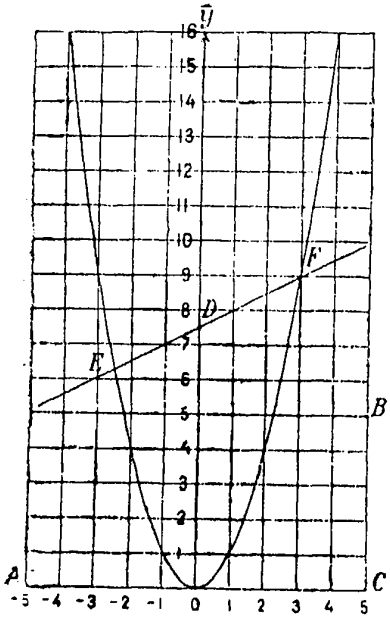


Рис. 3.

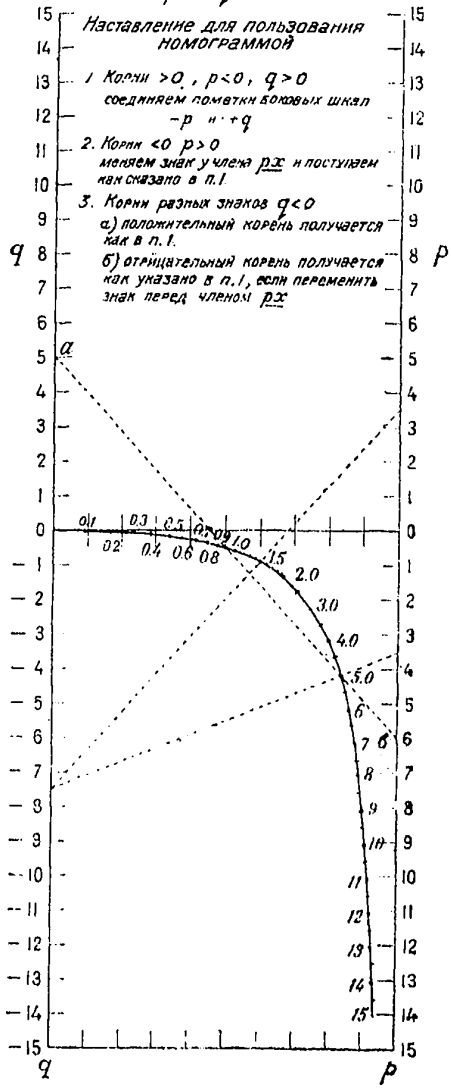


Рис. 4.

а) Решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$. (Оба корня одного знака и > 0.) Прикладываем линейку к делению вертикальной шкалы $+5$ (на левой шкале, помеченной буквой q) и к делению -6 на правой шкале, помеченной буквой p. Точки пересечения линии $+5$, $-6(ab)$ с криволинейной шкалой дают значения положительных корней $+1$ и $+5$, что читаем непосредственно на самой криволинейной шкале.

б) Решить уравнение $x^2+6x+5=0$ (оба корня одного знака и <0). Меняем знак у x и рассматриваем уравнение $x^2-6x+5=0$, корни которого по предыдущему $x_1=+1$ и $x_2=+5$, а потому для заданного уравнения получим $x_1=-1$; $x_2=-5$.

в) Решить уравнение $x^2+3{,}5x-7{,}5=0$ (корни разных знаков). Положительный корень $x_1=1{,}5$ получается в пересечении криволинейной шкалы с прямой линией, соединяющей точки с пометками $+3{,}5$ на шкале p и $-7{,}5$ на шкале q. Для получения отрицательного корня рассматриваем уравнение $x^2-3{,}5x-7{,}5=0$, т. е. меняем знак при x в первой степени и поступаем с новым уравнением как указано выше, т. е. соединяем по линейке точки шкалы p с пометкой $-3{,}5$, а точку шкалы q с пометкой $-7{,}5$; в пересечении с криволинейной шкалой в точке 5,0 получим значение отрицательного корня.

Д. Расчетные формулы для построения номограммы

Если начало прямоугольных координат ξ и η взято в точке O левой шкалы (соответствующей свободному числу уравнения q), то координаты ξ и η точек криволинейной шкалы вычисляют по формулам:

$$\xi=\frac{lx}{1+x}, \qquad \eta=-\frac{px^2}{1+x};$$

l есть расстояние между параллельными шкалами. Вертикальные шкалы — равномерные. p — масштаб номограммы. На рис. 4 он принят $p=5$ *мм*.

Е. Разложение корня квадратного уравнения в ряд

Если коэфициент a величина малая, то один из корней уравнения (1) приближенно равен:

$$x_1=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\ldots, \tag{9}$$

а другой корень будет величина большая; предельные значения корней при $\lim a\to 0$ будут:

$$\lim_{a\to 0}(x_1)=-\frac{c}{b}; \qquad \lim_{a\to 0}(x_2)=\infty.$$

§ 14. Биквадратные, возвратные, или симметричные, уравнения

Биквадратным уравнением называется уравнение 4-ой степени, в котором отсутствуют члены с нечетными степенями неизвестного, т. е. уравнения вида:

$$ax^4+bx^2+c=0. \tag{1}$$

Положив здесь $x^2=t$, где t — новая неизвестная, его легко привести к квадратному

$$at^2+bt+c=0,$$

а потому решения биквадратного уравнения (1) выражаются следующей формулой:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \tag{2}$$

Возвратным, или симметричным, уравнением называется такое уравнение любой степени, у которого коэфициенты членов, равно удаленных от начала и от конца уравнения, равны между собой. Полностью решаются в самом общем виде лишь уравнения третьей, четвертой и пятой степеней. Уравнение третьей степени решается простым разложением левой части на множители. Левая часть уравнения пятой степени также разлагается на два множителя, из которых один линейный, а другой четвертой степени опять-таки возвратной формы. Возвратные уравнения четвертой степени имеют вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0. \qquad (3)$$

Знак (+) при члене bx соответствует уравнениям первого рода, а знак (—) уравнениям второго рода.

Четыре корня возвратного уравнения суть решения следующего квадратного уравнения:

$$x^2 - zx \pm 1 = 0, \qquad (4)$$

где z — оба корня следующего квадратного уравнения:

$$az^2 + bz + (c \mp 2a) = 0. \qquad (5)$$

Свойство корней взаимных уравнений: если α есть корень, то $\frac{1}{\pm\alpha}$ есть также корень уравнения (3); знак + относится к уравнениям первого рода, а знак — относится к уравнениям второго рода.

§ 15. Однородные квадратные уравнения

Общая форма однородного квадратного уравнения такова:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Обозначая $\frac{x}{y} = t$, получим $At^2 + Bt + C = 0$ квадратное уравнение, корни которого

$$t = \frac{x}{y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Отсюда видно, что однородное уравнение второй степени разлагается на два множителя

$$A\left(x - \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \cdot y\right)\left(x - \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \cdot y\right) = 0. \qquad (*)$$

Свойствами однородных уравнений пользуются для решения систем совокупных уравнений 2-го порядка, когда одно из уравнений системы однородно. Тогда, выразив линейно x через y по равенству (*), подставляем эти значения в другое уравнение; получаем два уравнения второй степени, которые дадут четыре значения для y и сообразно этому четыре значения для x.

Пример. Решить систему уравнений

$$x^2 - 3y^2 + 2y = 3;$$
$$2x^2 - 7xy + 6y^2 = 0.$$

Второе уравнение дает:

$$x = 2y; \quad x = \frac{3}{2}y.$$

Первое уравнение дает два уравнения:

$$y^2+2y-3=0;\quad 3y^2-8y+12=0,$$

решение которых будет:

$$y_1=+1;\quad y_2=-3;\quad y_3=\frac{4+2\sqrt{-5}}{3};\quad y_4=\frac{4-2\sqrt{-5}}{3};$$

а потому:

$$x_1=+2;\quad x_2=-6;\quad x_3=2+\sqrt{-5};\quad x_4=2-\sqrt{-5}.$$

§ 16. Неравенства. Решение неравенства первой степени с одной переменной

А. Свойства неравенств

1. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; неравенство от этого не нарушится, т. е. если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

2. Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое неравенство, т. е. если $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (m), то знак неравенства не изменится, т. е. если $a>b$, то $am>bm$.

4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число ($-m$), то знак неравенства переменится на обратный, т. е. если $a>b$, то $-am<-bm$.

5. Если к обеим частям неравенства, содержащего неизвестные, прибавить или вычесть одно и то же число, то получим неравенство, равносильное заданному, т. е. удовлетворяющееся одними и теми же значениями неизвестных.

Следствие. Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.

6. Если обе части неравенства, содержащего неизвестные, умножим или разделим на одно и то же положительное число, то получим новое неравенство, равносильное первому.

Замечание. Если неравенство, содержащее неизвестные, умножаем на множитель, тоже содержащий неизвестные, то надо рассмотреть при всех ли значениях неизвестных этот множитель остается положительным.

Следствие. Если обе части неравенства содержат положительный общий множитель, то на него можно разделить обе части неравенства.

7. Если обе части неравенства, содержащего неизвестные, умножим или разделим на одно и то же отрицательное число и при этом переменим знак неравенства на противоположный, то получим новое неравенство, равносильное заданному.

Следствие. а) Переменив у всех членов неравенства знаки на противоположные (т. е. умножив обе части на —1), надо изменить знак неравенства на обратный.

б) Нельзя умножить обе части неравенства на буквенный множитель, знак которого неизвестен.

в) Неравенство с дробными членами можно привести к целому виду, умножив на произведение знаменателей дробей, стоящих в разных частях неравенства, и изменить знак неравенства, если это произведение отрицательно. Например, пусть дано неравенство $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$.

Тогда, если $BD>0$, то $AD-BC>0$,

„ $BD<0$, то $AD-BC<0$,

„ знак BD неизвестен, то неравенство $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$ удовлетворится при таких значениях неизвестных, при которых будет одновременно

$$\begin{matrix} AD-BC>0 \\ BD>0 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} AD-BC<0 \\ BD<0, \end{matrix}$$

т. е. решение заданного неравенства приводится к решению системы двух неравенств без дробных членов.

Б. Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

Если

$$a_1x+b_1>a_2x+b_2, \tag{1}$$

то

$$\left.\begin{matrix} x>\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} & \text{при } a_1-a_2>0 \\ x<\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} & \text{при } a_1-a_2<0 \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

т. е. одно неравенство первой степени дает для неизвестного один предел (m), ограничивающий значение неизвестного или снизу ($x>m$), или сверху ($x<m$).

В. Решение двух неравенств первой степени с одним неизвестным

$$\left.\begin{matrix} ax+b>a_1x+b_1 \\ cx+d>c_1x+d_1 \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

решения

$$\left.\begin{matrix} x>\frac{b_1-b}{a-a_1} & x>\frac{d_1-d}{c-c_1} \end{matrix}\right\}$$

или

$$\left.\begin{matrix} x<\frac{b_1-b}{a-a_1} & x<\frac{d_1-d}{c-c_1} \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

При этом могут представиться три случая:

1. Пределы неизвестного одинакового смысла; тогда достаточен один из них.

2. Пределы противоположного смысла; в таком случае для неизвестного можно брать только такие значения, которые заключены между найденными пределами.

3. Пределы противоречат друг другу; в таком случае система не имеет решения.

Пример 1. Что произойдет с дробью $\frac{a}{b}$, если к числителю и знаменателю прибавить положительное число p?

а) Дробь $\frac{a}{b}$ правильная, т. е. $\frac{a}{b}<1$, $a<b$; тогда видно, что неравенство $\frac{a+p}{b+p}<\frac{a}{b}$ будет несправедливо, так как приведет к условию $b<a$.

Неравенство $\frac{a+p}{b+p}>\frac{a}{b}$ будет справедливо, так как приводит к условию $b>a$, т. е. правильная дробь от прибавления к числителю

и знаменателю одинакового положительного числа p возрастает. Если число $p<0$, то правильная дробь будет убывать.

б) Дробь $\frac{a}{b}$ неправильная, т. е. $\frac{a}{b}>1$ и $a>b$, тогда легко видеть, что при $p>0$ дробь убывает, а при $p<0$ возрастает.

Пример 2. Если положительные числа a и b различны, то их среднее арифметическое больше, чем их среднее геометрическое, т. е.

$$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}. \tag{5}$$

Г. Геометрическое решение неравенства первой степени

В неравенстве

$$a_1x+b_1 \gtrless a_2x+b_2 \tag{6}$$

перенесем неизвестные члены в левую часть, а известные в правую, тогда $(a_1-a_2)\ x \lessgtr b_2-b_1$,

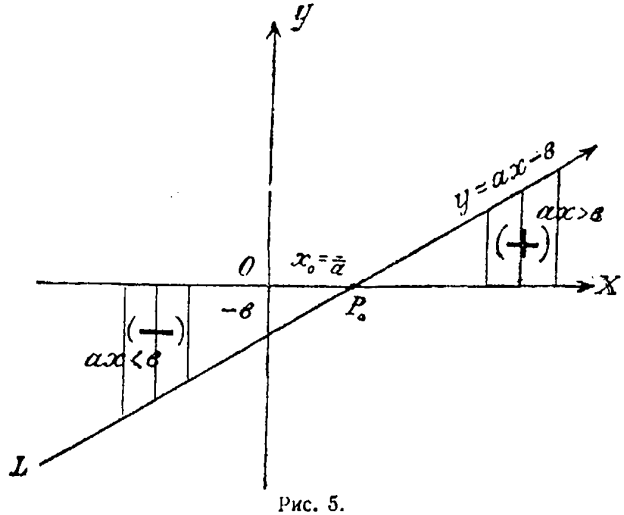


Рис. 5.

откуда следует, что неравенство первой степени с одной переменной x можно представить всегда в таком виде:

$$ax \lessgtr b. \tag{7}$$

Знак $\gtrless$, если он не определен, удобно заменить знаком $\bigvee$, который обозначает или один, или другой знак неравенства. Тогда можно неравенство (7) написать в таком виде:

$$ax \bigvee b \quad \text{или} \quad ax-b \bigvee 0. \tag{8}$$

Обозначив левую часть неравенства буквой y, сведем задачу к решению неравенства $y \bigvee 0$.

Выражение $y=ax-b$ есть уравнение прямой, tg угла наклона которой к оси X-ов равен a (рис. 5). При $x_0=+\frac{b}{a}$ выходит, что $y=0$, так как x_0 есть решение уравнения $ax-b=0$. Пусть эта точка есть P_0, тогда для всех значений $x>x_0$ ордината $y>0$ и знак $\bigvee$ обращается в знак $>$, т. е. будем иметь

$$ax-b>0 \quad \text{или} \quad ax>b.$$

Для всех значений $x<x_0$ ордината $y<0$ и знак $\vee$ обращается в знак $<$, т. е. будем иметь

$$ax-b<0 \quad \text{или} \quad ax<b.$$

Это наглядно представлено на рис. 5, который показывает, что неравенство (7) первой степени имеет знак $>$ для тех значений x, которым соответствуют ординаты, лежащие выше оси X и прямой $y=ax-b$; неравенство (7) имеет знак $<$ для значений x, которым соответствуют ординаты, лежащие ниже оси X-ов и прямой $y=ax-b$.

§ 17. Решение неравенства первой степени с двумя переменными

Всякое неравенство первой степени с двумя переменными путем тождественных преобразований можно привести к виду

$$Ax+By+C\gtrless 0. \quad (1)$$

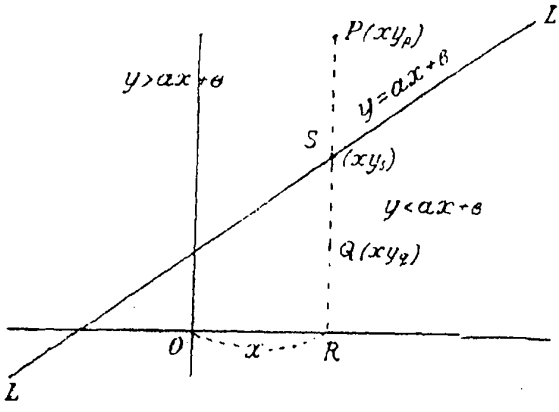


Рис. 6.

Очевидно, что коэффициент B можно всегда считать не равным 0, так как в случае $B=0$ будем иметь неравенство первой степени с одним неизвестным (§ 16). Неравенство (1) равносильно следующему:

$$y\gtrless -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}. \quad (1)^*$$

Последнее выражение показывает, что неравенства первой степени с двумя переменными обладают при любом значении одной переменной (например x) бесконечным множеством решений, отличающихся значениями другой переменной (y).

Таким образом, уравнения рассматриваемого типа обладают бесконечным множеством решений и носят поэтому название неопределенных уравнений.

Для определения той области, которой соответствует знак $>$, и той области, которой соответствует знак $<$ в (1)* или (1), рассмотрим прямую (рис. 6)

$$y=ax+b, \quad (2)$$

равносильную прямой

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}. \quad (2)^*$$

Если для произвольного значения $x=OR$ взять три точки P, S, Q, таких, что $y_p>y_s>y_q$, где y_s удовлетворяет уравнению (2) или (2)*, то прямая (2) разделит всю плоскость на две области:

1. В области, лежащей выше прямой ($y>y_s$), будет для любых x и y выполнено неравенство

$$y>ax+b.$$

2. В области, лежащей ниже прямой ($y<y_s$), будет для любых x и y выполнено неравенство

$$y<ax+b$$

и, наконец, для точек самой прямой L будет при любых x и y выполнено равенство

$$y = ax + b.$$

§ 18. Решение системы неравенств с несколькими переменными

Под системой неравенств понимают совокупность нескольких неравенств. Каждая комбинация численных значений x и y, входящих в эти неравенства, называется решением системы, если эти значения переменных удовлетворяют всем неравенствам заданной системы. Ограничимся решением системы двух неравенств с двумя переменными, применив геометрическое толкование каждого из двух неравенств. Метод решения вполне выяснится на приводимых ниже примерах.

Пример. Решить систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} x - y &> 1 \\ x + 2y &> 4 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Эта система равносильна следующей:

$$\left.\begin{aligned} y &< x - 1 \\ y &> 2 - 0{,}5x \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)'$$

Строим прямые (рис. 7)

$$\left.\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= -0{,}5x + 2 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)^{**}$$

По сказанному в предыдущем параграфе область плоскости, удовлетворяющая неравенству

$$y < x - 1 \quad \text{или} \quad x - y > 1,$$

располагается ниже прямой $y = x - 1$ (L_1, L'_1), а область плоскости, удовлетворяющая неравенству

$$y > -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{или} \quad x + 2y > 4,$$

располагается выше прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ($L_2 L'_2$), а потому область плоскости, удовлетворяющая одновременно обоим неравенствам (α), заключается в пределах угла L_1ML_2, где, очевидно, точка M (2, 1) есть точка пересечения прямых $(\alpha)^{**}$. Эта часть плоскости для наглядности на рис. 7 заштрихована. Например, координаты точки $x = +8$, $y = +4$, лежащей в указанной области, удовлетворяют заданной системе неравенств, так как

$$8 - 4 = 4 > 1,$$
$$8 + 2 \cdot 4 = 16 > 4.$$

Пример. Решить систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &> 1 \\ x - 2y &> -1 \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Эти неравенства равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} y &< 2x-1 \\ y &< \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)^*$$

Строим прямые

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ y &= \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)^{**}$$

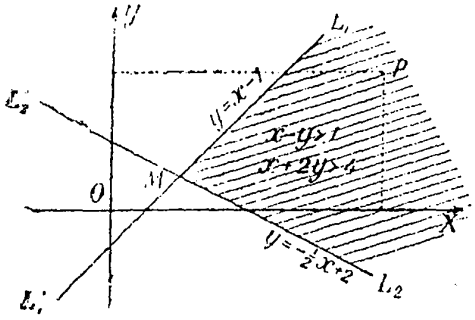


Рис. 7.

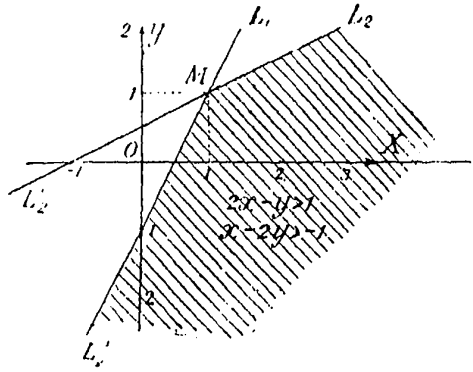


Рис. 8.

и подобно предыдущему примеру убеждаемся, что заштрихованная область плоскости (рис. 8), отвечающая углу L_2ML_1', заключает все решения, удовлетворяющие неравенствам (β).

§ 19. Неравенства второй степени и решение их

Неравенству второй степени всегда можно придать вид:

$$Y = ax^2 + bx + c \gtrless 0. \qquad (1)$$

При заданных значениях коэфициентов a, b и c, Y может быть >0 для одних значений переменной x и <0 для других. Решить неравенство второй степени (1) значит определить те значения переменной x, при которых Y принимает указанный (нужный) знак.

Вопрос распадается на три случая.

а) $b^2-4ac>0$. В этом случае корни x_1 и x_2 уравнения $Y=0$ вещественные и неравные (§ 13) и трехчлен Y может быть разложен на вещественные множители первой степени

$$Y = ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2). \qquad (2)$$

Пусть $x_1<x_2$, тогда при $a>0$ знаки Y определяются следующей таблицей:

	$x=$	$-\infty\ldots$	x_1	$\ldots$	x_2	$\ldots+\infty$
Y	$a>0$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
	$a<0$	<0	$=0$	>0	$=0$	<0

Геометрически эти результаты означают следующее: графиком функции $Y=ax^2+bx+c$ служит парабола, ось которой параллельна оси Y (рис. 9). В точках $x=x_1$ и $x=x_2$ парабола пересекает ось X-ов. При $a>0$ вершина параболы O лежит ниже оси X-ов, а при $a<0$ — выше. Знак величины Y определяется знаком ординаты у параболы; из рис. 9 видно, что внутри интервала от x_1 до x_2 все ординаты отрицательны, если $a>0$, и положительны, если $a<0$; вне этого интервала — наоборот.

$$b^2-4ac>0$$

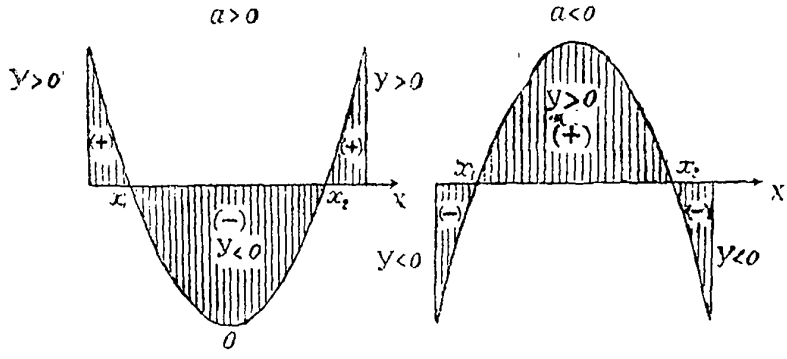


Рис. 9.

б) $b^2-4ac=0$. В этом случае корни уравнения $Y>0$ вещественные и равные. Обозначим равные корни через x_1. Тогда

$$Y=a(x-x_1)^2. \qquad (3)$$

При $x\neq x_1$ знак Y одинаков со знаком коэфициента a; при $x=x_1$ $Y=0$. Поэтому получим такую схему:

	$x=$	$-\infty\ldots$	x_1	$\ldots+\infty$
Y	$a>0$	>0	$=0$	>0
	$a<0$	<0	$=0$	<0

Геометрически это соответствует уравнению $y=a(x-x_1)^2$ параболы, ось которой параллельна оси Y-ов, а вершина O лежит на оси X при $x=x_1$ как видно из рис. 10.

в) $b^2-4ac<0$. В этом случае корни уравнения $Y=0$ мнимые и сопряженные и выражение Y можно представить в виде:

$$Y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, всегда положительно при любых значениях x, а потому

при $a>0$ $Y>0$ при всех значениях x
„ $a<0$ $Y<0$ „ „ „ x

Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола (рис. 11) ось которой параллельна оси Y; парабола не пересекает оси X-ов, так что ординаты всех точек кривой всегда имеют один и тот же знак.

$$b^2-4ac<0$$

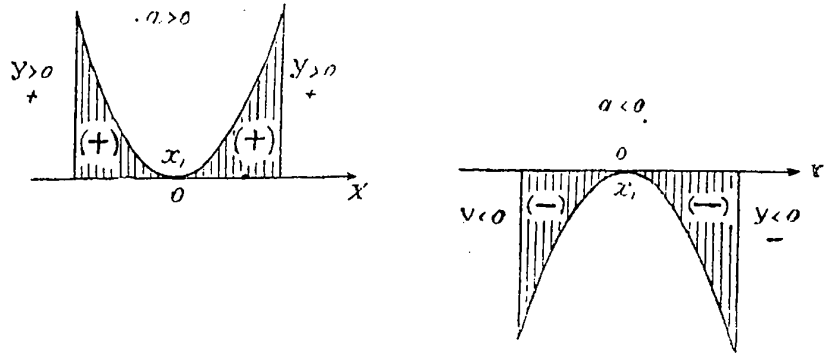


Рис. 10.

Пример. При каких значениях параметра λ будет выполняться неравенство

$$x^2+2x+\lambda>h,$$

где h — заданное число?

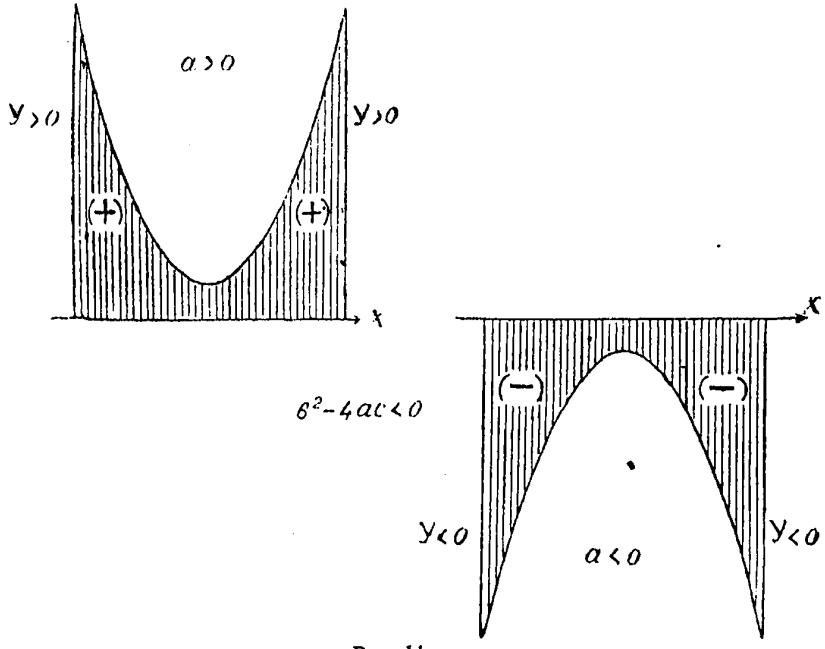


Рис. 11.

Это неравенство равносильно следующему:

$$x^2+2x+(\lambda-h)>0.$$

Чтобы этот трехчлен сохранял знак $+$ при всяком x необходимо, чтобы корни уравнения $x^2+2x+(\lambda-h)=0$ были мнимые, т. е. чтобы

$$\lambda > h+1.$$

Пример. Среднее геометрическое двух чисел a и b больше среднего гармонического. Средним гармоническим h называют такое число, которое связано с a и b следующим образом:

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{5}$$

или

$$\frac{1}{h}=\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{ab}=\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}},$$

что можно написать так:

$$\frac{h}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Так как, по доказанному выше, среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ меньше, чем среднее арифметическое $\frac{1}{2}(a+b)$, то выходит $h<\sqrt{ab}$ и имеем такой ряд неравенств:

$$h<\sqrt{ab}<\tfrac{1}{2}(a+b). \tag{6}$$

Пример. Геометрическое среднее меньше арифметического среднего при любом количестве положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, т. е. будем иметь:

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}<\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}. \tag{7}$$

Пример. Арифметическое среднее из n любых чисел (любых знаков) меньше по абсолютной величине их среднего квадратического, т. е.

$$\left|\frac{\Sigma a_i}{n}\right|<\sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}. \tag{8}$$

§ 20. Бином Ньютона

$$1.\ (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n+\ldots+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}+mx^{m-1}+x^m$$

$$2.\ (a\pm b)^m=a^m\pm ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2\pm\ldots\pm$$
$$\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^{m-n}b^n\pm\ldots\pm\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2b^{m-2}\mp mab^{m-1}+b^m$$

А. Таблица биномиальных коэфициентов при разных показателях m

Символически эти коэфициенты обозначают в виде простой дроби, но без черты, т. е. так: $\binom{m}{k}$ (см. § 4)

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

m	$\binom{m}{0}$	$\binom{m}{1}$	$\binom{m}{2}$	$\binom{m}{3}$	$\binom{m}{4}$	$\binom{m}{5}$	$\binom{m}{6}$	$\binom{m}{7}$	$\binom{m}{8}$	$\binom{m}{9}$	$\binom{m}{10}$
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	

Б. Свойства биномиальных коэфициентов

$$k \leqslant m$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}, \quad \binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m, \quad \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k}\frac{m+1}{m-k+1}, \quad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} + \binom{m}{k},$$

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \binom{m-2}{k} + \ldots + \binom{k}{k},$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m,$$

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} = 0.$$

Заметим, что символ $\binom{m}{k} = C_m$, т. е. числу сочетаний из m элементов по k (§ 4).

§ 21. Комплексные величины

$$i = +\sqrt{-1}$$

Действия над мнимыми величинами.

1. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
3. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$
5. $\sqrt{a + bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \cdot i\right]$
6. $\sqrt{a - bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i\right]$.

Геометрическое представление комплексных величин

Всякая комплексная величина

$$z = a + bi$$

может быть представлена в виде вектора $\overrightarrow{OM}$, координаты конца которого равны a и b или $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, т. е.

$$7.\quad z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где φ — вещественное число — аргумент; ρ — веществен. число — модуль.

$$8.\quad \begin{cases} \rho = +\sqrt{a^2+b^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Очевидно, что ρ и φ представляют собой полярные координаты конца вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 12).

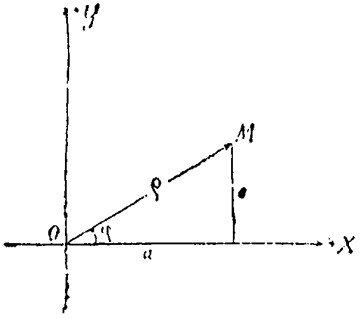


Рис. 12.

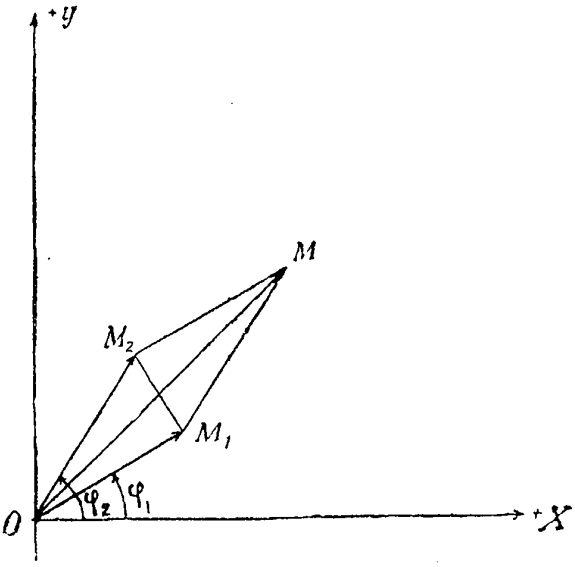


Рис. 13.

Действия над мнимыми величинами.

$$9.\quad \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\times r(\cos t + i\sin t) = \rho r[\cos(\varphi + t) + i\sin(\varphi + t)]$$

$$10.\quad \frac{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r(\cos t + i\sin t)} = \frac{\rho}{r}[\cos(\varphi - t) + i\sin(\varphi - t)]$$

$$11.\quad [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

или

$$11^*.\quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

} формула Моавра

$$12.\quad \sqrt[m]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right) =$$

$$= \sqrt[m]{\rho}\left(\frac{\cos\varphi + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right)$$

Так как геометрическое изображение комплексного числа $z = a + bi$ и вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 12) совершенно одинаково (см. отд. II, гл. 3), то можно сказать, что:

1) Сумме и разности комплексных чисел z_1 и z_2 соответствуют сумма и разность векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 13).

2) Умножение комплексных чисел имеет следующее геометрическое истолкование. Вектор $\overrightarrow{OM_1}$, соответствующий комплексному числу $\zeta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, следует повернуть в сторону возрастания углов φ на величину t, где t есть аргумент второго комплексного числа $z = r(\cos t + i\sin t)$, и увеличить модуль первого ρ во столько

раз, сколько единиц заключается в модуле r второго комплексного числа (рис. 14).

3) Геометрическое представление деления комплексных чисел очевидно, следующее: вектор $\overrightarrow{OP}$ делимого надо повернуть в сторону уменьшения аргументов на величину аргумента делителя t и модуль делимого уменьшить во столько раз, сколько единиц заключается в модуле делителя r (рис. 14).

4) Геометрический смысл формулы (12) извлечения корня m-ой степени из комплексного числа $z=a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$: все m значений корня $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{m-1}$ имеют один и тот же модуль $\sqrt[m]{\rho}$, аргумент φ_0 первого значения z_0 равен $\varphi:m$, а аргументы остальных $m-1$ значений получаются последовательным прибавлением величины $\frac{2\pi}{m}$. Поэтому числа $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{m-1}$ изображаются векторами, концы которых

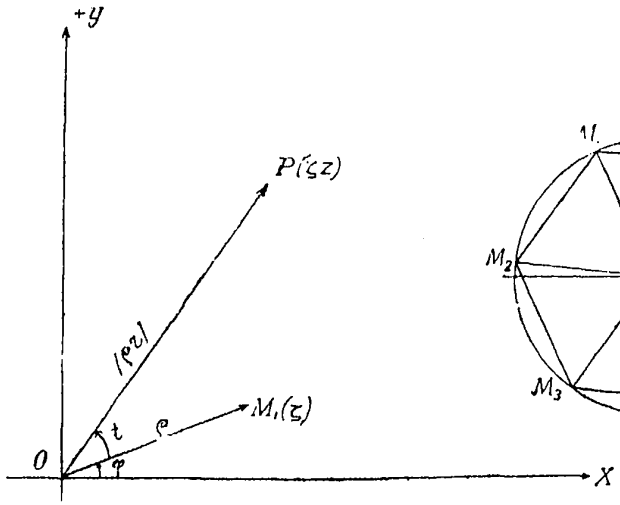


Рис. 14.

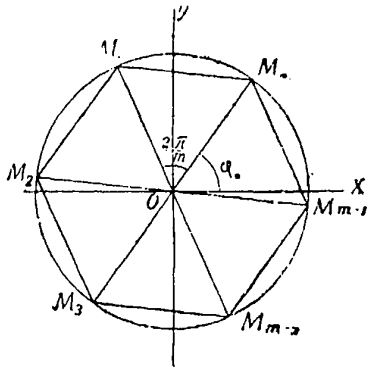


Рис. 15.

расположены в вершинах правильного n-угольника $M_1M_2 \ldots M_m$, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[m]{\rho}$ (на рис. 15 показан шестиугольник).

13. Корень n-ой степени из 1

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\frac{\sin 2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$\left.\begin{aligned} z_0&=\cos 0+i\sin 0=1\\ z_1&=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\\ z_2&=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z_{n-1}&=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\end{aligned}\right\}\ n\text{ — различных значений.}$$

14. Корень n-ой степени из -1

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}},$$

так как $-1=\cos\pi=\cos(2k+1)\pi$.

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$
$$u_1 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}$$
$$u_2 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n-1} = \cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2n-1)}{n}\pi.$$

§ 22. Зависимость между тригонометрическими и показательными функциями

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{v}{n}\right)^n = e^v \tag{1}$$

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b) \tag{2}$$

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi;\ e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi \text{ (формулы Эйлера)} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}(\cos x \pm i\sin x)\times(\cos y \pm i\sin y) &= \cos(x+y)\pm i\sin(x+y)\\ (\cos x \pm i\sin x)\ :\ (\cos y \pm i\sin y) &= \cos(x-y)\pm i\sin(x-y)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$e^{k\varphi i} = \cos k\varphi + i\sin k\varphi;\quad e^{-k\varphi i} = \cos k\varphi - i\sin k\varphi \tag{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \tag{7}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -i\frac{(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}} \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = i\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}} \tag{10}$$

$$\cos(a+bi) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\cos a - i\frac{e^b-e^{-b}}{2}\sin a \tag{11}$$

$$\sin(a+bi) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\sin a + i\frac{e^b-e^{-b}}{2}\cos a \tag{12}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix} \tag{13}$$

$$\operatorname{arc\,tg} ix = \frac{i}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{14}$$

§ 23. Суммы разных степеней ряда натуральных чисел

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \tag{3}$$

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2 \tag{4}$$

$$2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1) \tag{5}$$

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) \tag{6}$$

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1) \tag{7}$$

§ 24. Преобразование выражения $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)},$$

где

$$C=\sqrt{A^2-B}$$

есть полный квадрат.

§ 25. Формула Эйлера

$$\left.\begin{aligned}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2+\\+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_1c_2-c_1a_2)^2+(b_1c_2-c_1b_2)^2\end{aligned}\right\}$$

§ 26. Двучленные и трехчленные уравнения

Уравнения вида

$$z^n-a=0, \tag{1}$$

в которых a — может быть вещественное или комплексное число, называют двучленными.

Решение имеет вид:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right]\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,(n-1)$$

r — модуль, φ — аргумент числа a.

Все корни n-ой степени из числа a можно получить путем умножения одного из корней на различные корни той же степени из единицы. Корни n-ой степени из единицы определяются формулами § 21, стр. 44.

Пример. Решить уравнение: $z^6-2=0$.

В данном случае $a=2$ — есть число вещественное, а потому модуль его равен 2; аргумент равен нулю. Общее решение имеет вид:

$$z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{6}+i\sin\frac{2\pi k}{6}\right)$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

В развернутом виде получим:

$$z_0=\sqrt[6]{2}\,(\cos 0+i\sin 0)=\sqrt[6]{2}$$
$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-\sqrt[6]{2}$$
$$z_4=\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_5=\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Трехчленные уравнения имеют вид:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0, \quad \text{где} \quad n\geqslant 2. \tag{2}$$

Положив $x^n=z$, приведем предыдущее уравнение к квадратному

$$az^2+bz+c=0 \tag{*}$$

и решение трехчленного уравнения (2) приведется к решению двух двучленных уравнений:

$$x^n=z_1 \quad \text{и} \quad x^n=z_2,$$

где z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения (*).

§ 27. Уравнения 3-ей степени

Полное уравнение 3-ей степени

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

подстановкой

$$x=y-\frac{a}{3} \tag{2}$$

приводится к виду

$$y^3+py+q=0, \tag{3}$$

где

$$p=-\frac{a^2}{3}+b \quad \text{и} \quad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$

А. Коэфициенты вещественные

1. Если $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$, то уравнение (3) имеет один вещественный корень и два комплексных (мнимых) сопряженных.

Обозначая

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{и} \quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{4}$$

получим действительный корень $y_1=u+v$

мнимые

$$\left.\begin{aligned} y_2&=-\frac{1}{2}(u+v)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v)\\ y_3&=-\frac{1}{2}(u+v)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для численных выкладок удобнее вместо формул (4) пользоваться гиперболическими функциями (при наличии таблиц таковых функций). При этом удобно рассматривать два случая:

$$p>0 \quad \text{и} \quad p<0.$$

а) $p>0$ уравнение

$$y^3+py\pm q=0,$$

где $q>0$.

Положив

$$\operatorname{sh}\varphi=\frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}, \tag{6}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{3} \\ y_3 &= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} - i\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Верхние знаки соответствуют верхнему знаку при q и, наоборот, нижние — нижнему.

б) $p<0$, т. е. уравнение можно написать в виде:

$$y^3 - px \pm q = 0,$$

где p и q надо считать уже положительными.

Положив

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}, \qquad (6)^*$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} \\ y_3 &= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{3} - i\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (7)^*$$

Верхние знаки соответствуют верхнему знаку при q и наоборот.

Как видно, вещественная часть комплексных корней по абсолютной величине равна половине вещественного корня.

Пример. Решить уравнение:

$$x^3 - 2{,}7x^2 + 2{,}32x - 0{,}78 = 0.$$

Полагая

$$x = y + 0{,}9,$$

получим неполное уравнение

$$y^3 - 0{,}11y - 0{,}15 = 0,$$

так как $p<0$, то решаем по схеме (б), полагая

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{0{,}15}{2}\left(\frac{3}{0{,}11}\right)^{\frac{3}{2}} = 10{,}682$$

$$\varphi = 3{,}0595;\quad \frac{\varphi}{3} = 1{,}0198;\quad \mathrm{ch} = 1{,}5667;\quad \frac{\mathrm{sh}\,\varphi}{3} = 1{,}2060,$$

$$y_1 = +2\sqrt{\frac{0{,}11}{3}} \times 1{,}5667 = +0{,}600;\quad \sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{3} = \sqrt{0{,}11} \times 1{,}2060 = 0{,}400$$

поэтому

$$y_2 = -0{,}300 + i\,0{,}400$$

$$y_3 = -0{,}300 - i\,0{,}400$$

$$x_1 = y_1 + 0{,}9 = +0{,}600 + 0{,}9 = +1{,}500$$

$$x_2 = y_2 + 0{,}9 = -0{,}300 + i\,0{,}400 + 0{,}9 = +0{,}600 + i\,0{,}400$$

$$x_3 = y_3 + 0{,}9 = -0{,}300 - i\,0{,}400 + 0{,}9 = +0{,}600 - i\,0{,}400.$$

Таким образом, корни предложенного уравнения будут:

$$x_1 = +1{,}500$$
$$x_2 = +0{,}600 + i\,0{,}400$$
$$x_3 = +0{,}600 - i\,0{,}400.$$

2. Если $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, то все три корня вещественные и два из них равные

$$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}. \tag{8}$$

Обозначая через u действительное значение корня 3-ей степени из $-\frac{q}{2}$, получим решения:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2u \\ y_2 = y_3 &= -u \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Пример. Решить уравнение: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$.
Подстановкой $x = y - 1$ приводим к виду $y^3 - 3y - 2 = 0$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

т. е. все корни вещественные и два корня равных

$$u = \sqrt[3]{+1} = 1$$
$$y_1 = +2 \qquad x_1 = +1$$
$$y_2 = y_3 = -1 \qquad x_2 = x_3 = -2.$$

3. Если $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, то все три корня действительные. Коэффициент p, очевидно, должен быть < 0. Алгебраическое решение в этом случае удобнее заменить тригонометрическим.

Б. Тригонометрическое решение

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y_3 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ и } \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \tag{11}$$

Пример. Решить уравнение:

$$y^3 - 7y + 5 = 0; \quad p = -7; \quad q = +5.$$
$$r = \sqrt{-\left(\frac{7}{3}\right)^3} = 3{,}5642; \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^3 < 0$$
$$\cos\varphi = -\frac{5}{2\sqrt{-\left(\frac{7}{3}\right)^3}}; \quad \varphi = 134°32'26''$$

$$\ldots\ y_1 = 3{,}5642\ \cos 44^\circ 50' 49'' = +2{,}1660$$
$$y_2 = 3{,}5642\ \cos 164^\circ 50' 49'' = -2{,}9488$$
$$y_3 = 3{,}5642\ \cos 284^\circ 50' 49'' = +0{,}78281$$

§ 28. Логарифмы

Логарифмом положительного числа b при положительном основании a называется показатель (рациональный или иррациональный) степени, в которую надо возвысить число a (основание), чтобы получить данное число b, т. е.

$$x = \lg_a b, \text{ если } a^x = b.$$

Обыкновенные, или десятичные (или Бриггсовы), логарифмы (lg) имеют основанием число 10 и тогда

$$x = \lg b, \text{ если } 10^x = b. \tag{1}$$

Натуральные, или гиперболические, логарифмы (ln) имеют основанием число $e = 2{,}718281\ldots = \lim\limits_{a \to 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

тогда

$$y = \ln b, \text{ если } e^y = b. \tag{2}$$

Связь между обыкновенными и натуральными логарифмами дается следующей формулой:

$$\lg b = \mu \ln b, \tag{3}$$

где $\mu = \lg e = \lg 2{,}718281\ \ldots = 0{,}43429\ \ldots$ есть так называемый модуль системы обыкновенных логарифмов.

Обратно

$$\ln b = \frac{1}{\mu} \lg b, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{\mu} = \ln 10 = 2{,}30259\ldots.$$

Таким образом, модулем всякой системы логарифмов называют логарифм старого основания в новой системе; отсюда видно, что, имея таблицу логарифмов, вычисленную при одном основании, получение таблицы логарифмов при другом (новом) основании сведется к умножению всех логарифмов данной системы на модуль этой системы. Очевидно, что модуль есть величина постоянная для данных двух систем и не зависимая от числа, логарифм которого ищут.

А. Основные свойства логарифмов

1. Логарифм произведения нескольких чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$\lg (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n) = \lg b_1 + \lg b_2 + \lg b_3 + \ldots + \lg b_n \tag{5}$$

2. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\lg \frac{b}{c} = \lg b - \lg c. \tag{6}$$

3. Логарифм степени числа равен произведению показателя степени на логарифм числа

$$\lg b^n = n \lg b. \tag{7}$$

4. Логарифм корня равен логарифму подкоренного количества, разделенному на показателя корня

$$\lg \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \lg b. \qquad (8)$$

Умея логарифмировать выражения, можно обратно по данному результату логарифмирования найти то выражение, от которого получился данный результат.

Например, если

$$\lg x = \lg a + \lg b - 3 \lg c,$$

$$x = \frac{ab}{c^3}.$$

Эту операцию, обратную логарифмированию, называют потенцированием.

Б. Правила вычислений помощью обыкновенных логарифмов

Нахождение логарифма по заданному числу.

Всякое число можно представить в виде произведения целой степени 10 на число меньшее 10 и большее 1.

Например:

$$\begin{aligned} 43760 &= 4{,}376 \times 10^4 \\ 4376 &= 4{,}376 \times 10^3 \\ 437{,}6 &= 4{,}376 \times 10^2 \\ 43{,}76 &= 4{,}376 \times 10^1 \\ 4{,}376 &= 4{,}376 \times 10^0 \end{aligned}$$

Поэтому логарифмы этих чисел будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} \lg 43760 &= 4 + \lg 4{,}376 = 4 + 0{,}6411 \\ \lg 4376 &= 3 + \lg 4{,}376 = 3 + 0{,}6411 \\ \lg 437{,}6 &= 2 + \lg 4{,}376 = 2 + 0{,}6411 \\ \lg 43{,}76 &= 1 + \lg 4{,}376 = 1 + 0{,}6411 \\ \lg 4{,}376 &= 0 + \lg 4{,}376 = 0 + 0{,}6411 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что логарифмы всех написанных выше чисел имеют дробную часть одинаковую, а различаются только целыми частями. Дробная часть логарифма называется мантиссой, а целая часть — характеристикой. Как видно из приведенных выше примеров, положительная характеристика всегда на единицу меньше числа знаков в целой части числа.

Таким образом, для нахождения логарифма любого четырехзначного числа достаточно иметь таблицу мантисс всех трехзначных чисел от 100 до 1000 независимо от места запятой в этом числе. На четвертый знак числа мантисса получается простым пропорциональным интерполированием табличных чисел.

Четырехзначные мантиссы указанных чисел приведены в Мореходных таблицах 1943 г., табл. 1.

В. О логарифмах дробных чисел

Всякое дробное число можно подобным же образом представить в виде произведения отрицательной целой степени числа 10 на число, меньшее 10 и большее единицы.

Например:

$$0{,}4376 = 4{,}376 \times 10^{-1}$$
$$0{,}04376 = 4{,}376 \times 10^{-2}$$
$$0{,}004376 = 4{,}376 \times 10^{-3}$$
$$0{,}0004376 = 4{,}376 \times 10^{-4}$$

Поэтому логарифмы написанных чисел будут соответственно равны:

$$\lg 0{,}4376 = -1 + \lg 4{,}376 = -1 + 0{,}6411$$
$$\lg 0{,}04376 = -2 + \lg 4{,}376 = -2 + 0{,}6411$$
$$\lg 0{,}004376 = -3 + \lg 4{,}376 = -3 + 0{,}6411$$
$$\lg 0{,}0004376 = -4 + \lg 4{,}376 = -4 + 0{,}6411$$

Отсюда видно, что отрицательная характеристика равна числу нулей, стоящих до первой значащей цифры данного числа, считая в том числе и нуль целых. Таким образом, логарифм числа, меньшего единицы, состоит из двух частей: отрицательной характеристики и положительной мантиссы, выбираемой из той же самой таблицы, как и в случае числа, большего единицы. Как видно, эта положительная мантисса одинаковая у всех четырех написанных выше чисел. Соединяя положительную и отрицательную части логарифма дробного числа, следовало бы написать логарифмы этих чисел так:

$$\lg 0{,}4376 = -0{,}3589$$
$$\lg 0{,}04376 = -1{,}3589$$
$$\lg 0{,}004376 = -2{,}3589$$
$$\lg 0{,}0004376 = -3{,}3589$$

Таким образом, логарифмы дробных чисел величины отрицательные.

Чтобы избежать обращения с отрицательными числами, условились действительного вычитания не производить, а писать логарифм дроби в виде двучлена, целая часть которого представляет отрицательную характеристику, а дробная представляет положительную мантиссу и условились писать как логарифм числа, большего единицы, но над отрицательной характеристикой писать минус.

Таким образом, будет:

$$\lg 0{,}4376 = \bar{1}{,}6411$$
$$\lg 0{,}04376 = \bar{2}{,}6411$$
$$\lg 0{,}004376 = \bar{3}{,}6411$$
$$\lg 0{,}0004376 = \bar{4}{,}6411$$

Отсюда следует такое правило писания логарифма дробного числа: число всех нулей до первой значащей цифры, не обращая внимания на запятую, равно отрицательной характеристике. Мантисса находится из таблицы 1 Мореходных таблиц 1943 г. по значащим цифрам заданного числа.

Г. Употребление положительных характеристик у логарифмов чисел, меньших единицы

В таблицах логарифмов тригонометрических функций, численная величина коих меньше единицы, принято условно писать положительные характеристики, как это видно, например, в логарифмах sin-а и cos-а, приведенных в Мореходных таблицах 1943 г.

Удобно вообще у логарифмов дробных чисел писать положительную характеристику вместо отрицательной. Достигается это таким приемом. Пусть дано число 0,5228 и его логарифм, равный $\bar{1},7183$; напишем этот логарифм, прибавив и вычтя 10 из правой части

$$\bar{1},7183 = -1 + 0,7183 = 9 + 0,7183 - 10.$$

Здесь 9 есть число положительное, так же как и мантисса 0,7183. Таким образом, логарифм $\bar{1},7183$ с положительной характеристикой пишут $9,7183_{-10}$. При таком способе писания логарифма отрицательной частью его будет -10. Подобным же образом логарифм числа 0,05237 с отрицательной характеристикой напишут так: $\bar{2},7191$, а с положительной характеристикой его надо написать: $8,7191_{-10}$.

Общее правило писания положительной характеристики логарифма дроби таково: число нулей до первой значащей цифры данного числа надо вычесть из 10, разность и будет равна положительной характеристике; мантиссу находят обычным приемом. Если данное число меньше чем 10^{-10}, 10^{-20}, т. е. если отрицательная характеристика логарифма по абсолютной величине больше 10, 20, ..., то для получения положительной характеристики прибавляют и вычитают 20, 30, ...

Иногда отрицательную часть логарифма -10, -20, ... не пишут, а только подразумевают; но при сложных вычислениях и когда приходится иметь дело с числами разных порядков, то -10, -20, ... следует писать.

Правило определения характеристики логарифма любого числа можно формулировать еще так: характеристика равна номеру места старшей значащей цифры числа, если места единиц считать за нулевые и нумеровать места цифр следующим образом:

$$\ldots 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}\ldots$$
$$\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots$$

или при употреблении положительных характеристик дробных чисел:

$$\ldots 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ \ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ldots$$
$$\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots$$

Д. Употребление дополнений

Когда определяют логарифм дроби $\frac{a}{b}$, то вместо того, чтобы из $\lg a$ вычесть $\lg b$ предпочитают к $\lg a$ придать $\lg\left(\frac{1}{b}\right)$, т. е. придать дополнение $\lg b$ до 0. Для получения дополнения логарифма числа до 0, надо все цифры данного логарифма вычесть из 9, а последнюю — правую — из 10.

Например:

$$\lg 2 = 0,3010; \quad \lg\frac{1}{2} = \text{допол. } \lg 2 = 9,6990_{-10}.$$

К сказанному выше необходимо добавить, что при возвышении числа $N<1$ в дробную степень x при помощи логарифмов, по формуле $\lg N^x = x \lg N$ необходимо сначала выразить $\lg N$ одним отрицательным числом.

Например:

$$\lg (0,2000)^{3/2} = \frac{3}{2}\lg 0,2 = \frac{3}{2}(\bar{1},3010) = \frac{3}{2}(-0,6990) = -1,0485 = 8,9515_{-10}.$$

Е. О нахождении числа по заданному логарифму

Приискивать число по заданному его логарифму можно помощью той же таблицы логарифмов обратным входом. Так именно поступают в таблицах пятизначных и выше. Для четырехзначных логарифмов удобнее устроить таблицу с прямым входом, подобную таблице 1-ой Мореходных таблиц 1943 г., но аргументом этой таблицы взять первые три значащие цифры мантиссы. Так именно устроена 2-я таблица — антилогарифмы. Пользование этой таблицей аналогично пользованию 1-ой таблицей.

Число выбирается из таблицы соответственно трем первым цифрам мантиссы логарифма, а на четвертый знак табличное число интерполируют, что всегда легко сделать в уме.

При положительной характеристике в целой части числа будет число цифр на единицу больше, чем характеристика данного логарифма. При отрицательной характеристике число нулей до первой значащей цифры равно отрицательной характеристике данного логарифма. Если этот логарифм пишется с положительной характеристикой, то число нулей равно дополнению до 10 положительной характеристики.

Так:

$\lg x = 2{,}7140$	$x = 517{,}6$
$\lg x = 1{,}7143$	$x = 51{,}80$
$\lg x = 7{,}7146$	$x = 0{,}005183$
$\lg x = 2{,}2395$	$x = 173{,}6$
$\lg x = 1{,}7881$	$x = 61{,}39$

Ж. Погрешности вычислений по логарифмам

Мантиссы логарифмов известны с некоторой погрешностью, наибольшая величина которой не превосходит 0,5 единицы последнего знака. Поэтому, если бы числа, которые входят в вычисления, были совершенно точны, то вследствие применения для вычислений логарифмов, результат все-таки оказался бы ошибочен. Надо найти поэтому, какая будет погрешность в логарифме числа N, если само число заключает в себе погрешность ΔN, и обратно, какая будет погрешность в числе N, если его логарифм известен с некоторой погрешностью $\Delta \lg N$.

Для определения погрешности $\Delta \lg N$, вследствие погрешности ΔN числа, имеем прямо по таблице производных (отд. II, гл. 1)

$$\Delta \lg N = \mu \frac{\Delta N}{N}, \tag{9}$$

где $\mu = 0{,}43429\ldots$ есть модуль обыкновенной системы логарифмов.

Отсюда видно, что погрешность логарифма пропорциональна относительной погрешности числа. Умножим правую часть (9) на 10^4, чтобы погрешность логарифма выразить в единицах четвертого знака, и получим

$$\Delta_4 \lg N = 0{,}43429 \frac{\Delta N}{N} 10^4. \tag{9}^*$$

Положим для удобства $\Delta N = 1$, т. е. единице четвертого знака, тогда приведенная ниже таблица показывает погрешность логарифма в четвертом знаке сообразно различным числам N.

Таблица А

числа N	$\Delta_4 \lg N$
1000	4,3 ед.
1500	2,9
2000	2,2
2500	1,7
3000	1,4
3500	1,2
4000	1,1
4500	1,0
5000	0,9
5500	0,8
6000	0,7
6500	0,7
7000	0,6
7500	0,6
8000	0,6
8500	0,5
9000	0,5
9500	0,5
10000	0,4

Таблица Б

числа N	погреш. $\Delta_4 N$
1000	0,2 ед.
1500	0,3
2000	0,5
2500	0,6
3000	0,7
3500	0,8
4000	0,9
4500	1,0
5000	1,1
5500	1,3
6000	1,4
6500	1,5
7000	1,6
7500	1,7
8000	1,8
8500	2,0
9000	2,1
9500	2,2
10000	2,3

Из таблицы А видно, что если число дано с четырьмя значащими цифрами, то его логарифм следует писать тоже с четырьмя знаками, т. е. вообще число значащих цифр в числе должно быть одинаково с числом десятичных знаков в логарифме этого числа. Обратно, для определения погрешности числа ΔN, вследствие погрешности в его логарифме $\Delta \lg N$, из (9) * получаем

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta_4 \lg N}{10^4} = 2{,}3026 \frac{\Delta_4 \lg N}{10^4}. \qquad (10)$$

Отсюда видно, что относительная погрешность числа остается постоянной, если $\Delta_4 \lg N$ величина постоянная.

В приводимой ниже таблице Б показаны погрешности разных чисел в четвертом знаке при погрешности логарифма числа, равной одной единице четвертого знака:

$$\Delta_4 \lg N = 1.$$

Таблица Б показывает, что четвертая значащая цифра по четырехзначным таблицам логарифмов определяется почти достоверно только в том случае, если пользоваться самой начальной частью таблиц. Вообще же четвертый знак числа по четырехзначным логарифмам не может быть найден правильный. Выписывать в таком случае более четырех знаков не имеет никакого смысла.

Аналогичные соображения справедливы и для таблиц логарифмов любого числа знаков.

Таким образом получается общее правило: при вычислении помощью логарифмов надо пользоваться таблицами логарифмов с таким числом знаков, сколько значащих цифр в числе; и наоборот, по данному логарифму находить число значащих цифр в числе не более числа цифр в логарифме.

3. Вычисления помощью натуральных логарифмов

Практические вычисления выполняют исключительно по таблицам обыкновенных логарифмов, но вычисления помощью таблиц натуральных логарифмов теоретически не отличались бы от вычислений помощью обыкновенных логарифмов. Удобные и достаточно пространные таблицы четырехзначных натуральных логарифмов приведены в сборнике математических таблиц Standart four-figure Mathematical Tables, составленных L. M. Milne — Thomson and L. J. Comrie (London, 1931).

Здесь даны натуральные логарифмы чисел больших и меньших единицы, причем для чисел, меньших единицы, принята система отрицательных характеристик. Для чисел, больших единицы, аргумент x распространен лишь до 1,5, но рядом с $\ln x$ приведены $\ln 10x$, что практически увеличивает диапазон аргумента в десять раз. Для аргументов, больших 1,5, приведены величины $\ln 10x$ и $\ln 100x$. В известном математическом и техническом справочнике Hütte приведены натуральные логарифмы чисел от 1 до 1100 через 1 с пятью знаками, но так как разности последовательных логарифмов довольно велики, то таблица эта мало удобна.

Во многих технических вопросах приходится иметь дело с натуральными логарифмами, и если нет под руками удобных таблиц таких логарифмов, то они могут быть получены по формуле (4), выбрав из таблиц обыкновенных (десятичных) логарифмов десятичный логарифм заданного числа.

Примеры: $N=1{,}200$; $\lg 1{,}200=0{,}0792$, а $\ln 1{,}200=2{,}30259\times 0{,}0792=0{,}1823_6$ — это и есть натуральный логарифм числа 1,200, каковую величину нашли бы по таблице Comrie на стр. 190 в Table XII. $N=0{,}7500$, $\lg 0{,}7500=\bar{1}{,}8751=-0{,}1249$, $\ln 0{,}75=-2{,}30259\times 0{,}1249=$ $=-0{,}2876=\bar{1}{,}7124$; таким образом, $\ln 0{,}75=\bar{1}{,}7124$.

Если надо найти число N по данному его натуральному логарифму, то по формуле (3) сначала найдем десятичный логарифм этого числа, а затем по таблице № 2 Мореходных таблиц 1943 г. (антилогарифмы) получим число, соответственное заданному натуральному логарифму.

Примеры: $\ln N=2{,}6064$; $\lg N=0{,}43429\times 2{,}6064=1{,}1319$; $N=13{,}55$; $\ln N=-0{,}7963$; $\lg N=-0{,}7963\times 0{,}43429=-0{,}3458=9{,}6542$; $N=0{,}4510$.

§ 29. Таблицы логарифмов сумм и разностей

Когда приходится находить логарифмы суммы или разности двух величин, известных по своим логарифмам, то вместо приведения к логарифмическому виду удобнее, проще и скорее пользоваться особыми вспомогательными таблицами, которые известны под названием таблиц логарифмов сумм и разностей Гаусса.

Основаны эти таблицы на следующем: если даны $\lg a$ и $\lg b$, где $a>b$, то, значит, известна величина $x=\frac{a}{b}$, так как $\lg x=\lg a-\lg b$ и по условию $x>1$.

Очевидно, что

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)=a\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

и поэтому

$$\lg(a+b)=\lg a+\lg\left(1+\frac{1}{x}\right). \qquad (11)$$

Таким образом, для получения $\lg(a+b)$ надо к логарифму большего числа придать положительную величину $\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$, которая зависит только от отношения чисел a и b и не зависит от абсолютных величин их. Таблица величин $\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$, устроенная таким именно образом, имеется в Мореходных таблицах 1943 г. под № 3. Для краткости $\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$ обозначают обычно буквой α. Аргументом для выбора величины α из этой таблицы служит разность логарифмов

$$\lg a-\lg b=\lg x.$$

Пример. $\lg a = 1{,}7398$; $\lg b = 0{,}9882$.

$$\begin{aligned}
\lg a &= 1{,}7398\\
\lg b &= 0{,}9882\\
\text{аргумент} &= \overline{0{,}7516}\\
\alpha &= \overline{0{,}0708}\\
\lg a &= 1{,}7398\\
\lg(a+b) &= \overline{1{,}8106}
\end{aligned}$$

Подобным же образом для получения $\lg(a-b)$ напишем

$$a-b = a\left(1-\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right) = a\left(1-\frac{1}{x}\right),$$

где

$$x = a:b,$$

и, обозначая через $\frac{1}{S}$ величину $1-\frac{1}{x}$, получим

$$\lg(a-b) = \lg a - \lg S,$$

т. е. для получения логарифма $\lg(a-b)$ надо из логарифма большего числа a вычесть $\lg S$; величины $\lg S$ зависят только от отношения чисел a и b и не зависят от абсолютных величин этих чисел. Вместо того, чтобы вычитать $\lg S$, удобнее придавать логарифм дополнения этой величины, т. е. придавать $\lg\frac{1}{S}$, который обозначают обычно через β; тогда получим

$$\lg(a-b) = \lg a + \beta. \qquad (12)$$

Величины $\lg\beta = \lg\frac{1}{S}$ приведены в таблице № 4 Мореходных таблиц 1943 г.; выбирают эти числа по аргументу $\lg a - \lg b$.

Пример. $\lg a = 1{,}7398$; $\lg b = 0{,}9882$.

$$\begin{aligned}
\lg a &= 1{,}7398\\
\lg b &= 0{,}9882\\
\text{аргумент} &= \overline{0{,}7516}\\
\beta &= 9{,}9153\\
\lg a &= 1{,}7398\\
\lg(a-b) &= \overline{1{,}6551}
\end{aligned}$$

Таблицы гауссовых логарифмов сумм и разностей, приводимые в разных сборниках математических таблиц, устроены иногда различно, а потому перед пользованием таблицами, следует прочитать прилагаемое объяснение и наставление для работы с ними.

Не останавливаясь на возможных вариантах решения этих двух задач, обратим внимание лишь на следующее обстоятельство. Из принятого выше обозначения для логарифмов разностей

$$\frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{x}$$

следует, что

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{x} = 1, \qquad (13)$$

откуда видно, что аргумент таблицы разностей x и величина S могут изменяться в таких пределах:

$$\begin{array}{ll} x=1 & S=\infty \\ \downarrow x=2 & S=2\uparrow \\ x=\infty & S=1 \end{array}$$

что показывает следующее: пока аргумент $x<2$, т. е. $\lg a-\lg b<$ $<0{,}3010$, то $\lg S$ изменяется от ∞ до 0,3010, а когда аргумент x станет больше 2 и будет изменяться от 2 до ∞, число S логарифма разностей будет изменяться от 2 до 1. Отсюда видно, что распространять таблицу логарифмов разностей на все значения аргумента x от 1 до ∞ нет надобности, а достаточно ограничиться пределами от 1 до 2; когда аргумент x будет >2, таблицей надо пользоваться обратным входом, принимая величины S за аргумент; так как аргументом служит не самое число x, а его логарифм $\lg x=\lg a-\lg b$ и так как по аргументу $\lg x$ получается не величина S, а ее логарифм, то пределами аргумента будут величины 0 и 0,3010, а пределами логарифма разностей будут величины от 0,3010 до ∞. На этом принципе устроены таблицы логарифмов разностей в сборнике пятизначных таблиц Глазенапа. Этот принцип применяют в многозначных таблицах логарифмов разностей, так как это сокращает объем таблиц.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Свойства углов. Сумма углов и равенство их в разных случаях . . 61
§ 2. Свойства углов в связи с окружностью 62
§ 3. На данном отрезке $AB = a$ построить сегмент, вмещающий данный угол α 64
§ 4. Величина квадрата стороны треугольника 65
§ 5. Свойство внешних и внутренних секущих окружности 67
§ 6. Свойство биссектрис треугольника и перпендикуляра на гипотенузу 68
§ 7. Четыре замечательные точки в треугольнике 69
§ 8. Пропорциональные линии в треугольнике; подобные и равные треугольники 70
§ 9. Графическое умножение и деление 72
§ 10. Выражение сторон a некоторых правильных многоугольников, вписанных в круг радиуса r 73
§ 11. Общие формулы, относящиеся к разным плоским геометрическим фигурам 73
§ 12. Таблица длин дуги, стрелки, хорды и площади сегмента в круге при радиусе, равном 1 79
§ 13. Формулы, относящиеся к разным геометрическим телам 83
§ 14. Поверхности и объемы тел вращения. Теоремы Гюльдена 87

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Киселёв**. Геометрия.
2. **Вебер и Вельштейн**. Энциклопедия элементарной математики. Mathesis. Одесса, 1910.

§ 1. Свойства углов. Сумма углов и равенство их в разных случаях

1. Фигура, образованная двумя лучами AC и AB (рис. 16), исходящими из одной точки A, называется *углом*. Точка A — вершина угла, а лучи AC и AB — стороны угла. Угол обозначают или одной

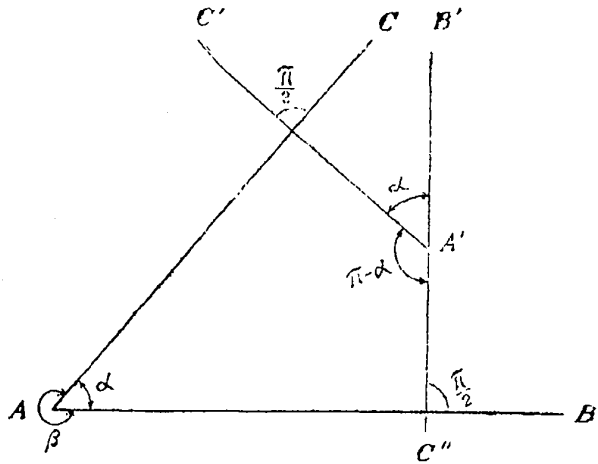


Рис. 16.

буквой, например α, или тремя — CAB. В первом случае буква α обозначает именно ту область плоскости, которая относится к углу. Если надо обозначить внешнюю область угла, то букву β ставят, как указано на рис. 16.

2. Углы измеряют разными мерами (единицами), о чем сказано в главе 3.

3. Два угла считаются равными, если при совмещении вершин стороны также могут совместиться. Всякие две фигуры, которые при наложении совмещаются всеми своими точками, называют *конгруентными*. Очевидно, что такие равные углы выражаются одинаковым числом единиц, которыми измеряют их.

4. Сумма двух смежных углов равна двум прямым (π) или 180°.

5. Сумма нескольких углов, расположенных вокруг одной точки, равна четырем прямым (2π) или 360°.

6. Два угла, стороны которых попарно перпендикулярны или равны между собой, или дополняют один другого до 180° (π) (рис. 16).

7. Два угла, стороны которых попарно параллельны, или равны между собой, или дополняют один другого до 180° (π) (рис. 17).

8. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым или 180°.

9. Сумма Σ внутренних углов многоугольника равна двум прямым, умноженным на число сторон многоугольника без двух

$$\Sigma = 2d(n-2) \quad \text{или} \quad 180^\circ(n-2), \quad \text{или} \quad \pi(n-2);$$

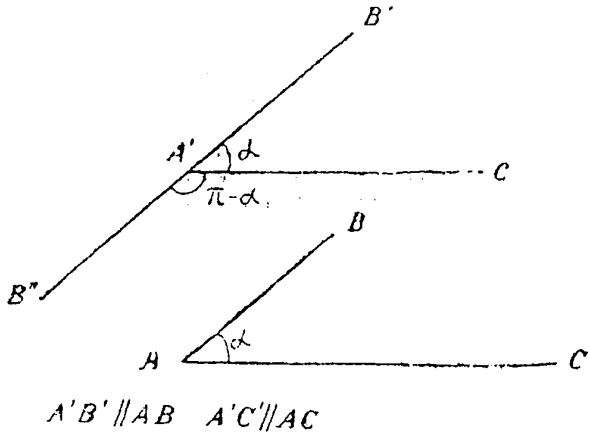


Рис. 17.

угол смежный с внутренним углом многоугольника называют внешним.

10. Сумма Σ_1 внешних углов многоугольника равна четырем прямым

$$\Sigma_1 = 4d \quad \text{или} \quad 360^\circ, \quad \text{или} \quad 2\pi.$$

§ 2. Свойства углов в связи с окружностью

1. Вписанный угол $ABC = \alpha$ (рис. 18) измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т. е. равен половине центрального угла $AOC = x$, опирающегося на ту же дугу AC, или $\angle \alpha = \frac{1}{2} AOC$; таким же образом угол ABD измеряется половиной дуги AD и равен половине центрального угла AOD, т. е. $\angle(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} AOD$.

2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (хорду), равны. Так угол $AB'C = ABC = \alpha$ (рис. 18).

3. Угол B (рис. 19), вершина которого лежит внутри окружности круга, измеряется полусуммой двух дуг AC и ED и равен полусумме центральных углов $AOC = x$ и $EOD = y$, то есть

$$\angle B = \angle ABC = \frac{1}{2}(x + y).$$

4. Угол B_1 (рис. 19), вершина которого лежит вне окружности круга, измеряется полуразностью дуг AC и ED и равен полуразности центральных углов $AOC = x$ и $EOD = y$, то есть,

$$\angle B_1 = \angle AB_1C = \frac{1}{2}(x - y).$$

5. Угол $TAB=\alpha$ (рис. 20) между касательной AT и хордой AB, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги AB и равен половине центрального угла $AOB=\beta$, то есть

$$\angle TAB=\alpha=\frac{1}{2}(AOB)=\frac{1}{2}\beta,$$

$$\angle T_1AB=180^\circ-\alpha=\frac{1}{2}(360^\circ-\beta).$$

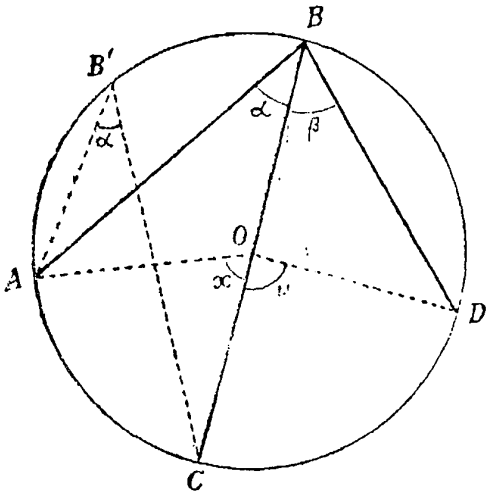


Рис. 18.

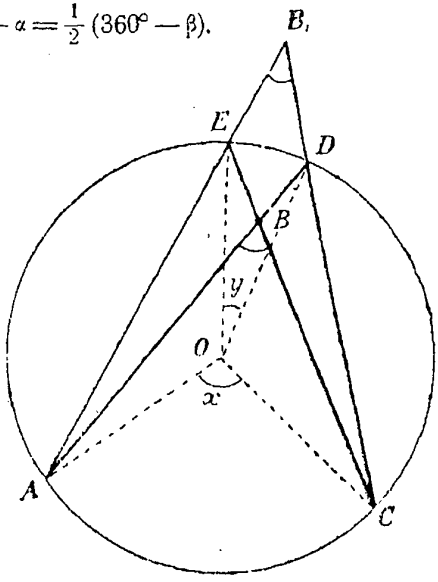


Рис. 19.

6. Угол B между касательной TAB и секущей BCD (рис. 21) измеряется полуразностью дуг ACE и ADE и равен полуразности центральных углов $DOA=x$ и $AOC=y$, то есть:

$$\angle B=\angle ABD=\frac{1}{2}(x-y).$$

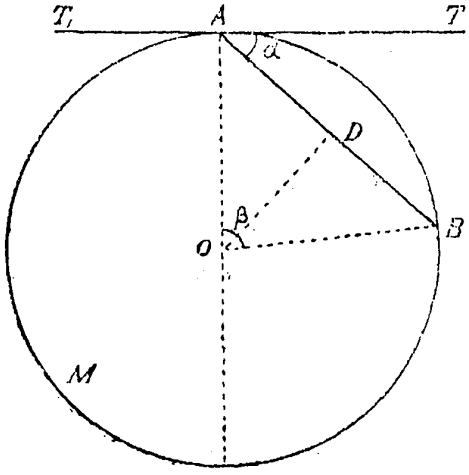


Рис. 20.

7. Угол B (рис. 22), заключенный между двумя касательными BT и BT_1, измеряется полуразностью дуг AC и CA и равен полуразности

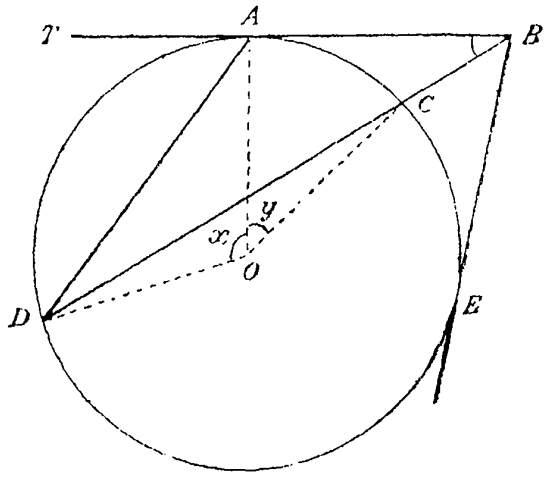


Рис. 21.

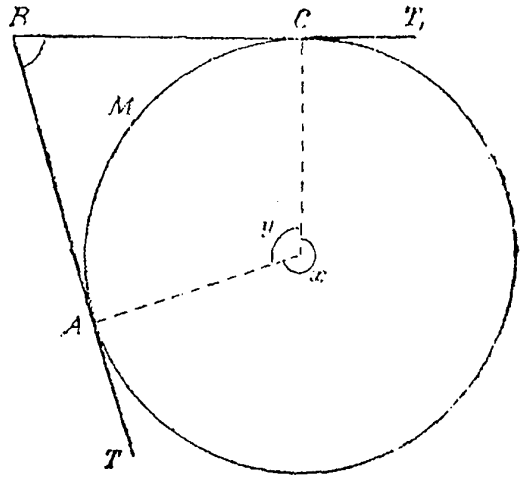


Рис. 22.

центральных углов x и y, соответствующих точкам касания A и C (рис. 22), то есть

$$\angle B = \frac{1}{2}(x - y).$$

§ 3. На данном отрезке $AB = a$ построить сегмент, вмещающий данный угол α

1. При точке A отрезка $AB = a$ строим угол (рис. 23) $BAT = \alpha$ и проводим линию $AO \perp$ к AT или при точке A проводим линию AO

под углом $90°-\alpha$ к линии AB. Через середину D линии AB проводим линию, перпендикулярную к ней, и в пересечении этих перпендикуляров получим центр O круга, дуга которого $ACmB$ и образует искомый сегмент.

Соединив любую точку C с концами отрезка AB, увидим, что всегда угол $ACB=\alpha$.

2. Если угол $\alpha>90°$ (рис. 24), то проведем через A прямую AO под углом $\alpha-90°$ к линии AB и через середину D — перпендикуляр

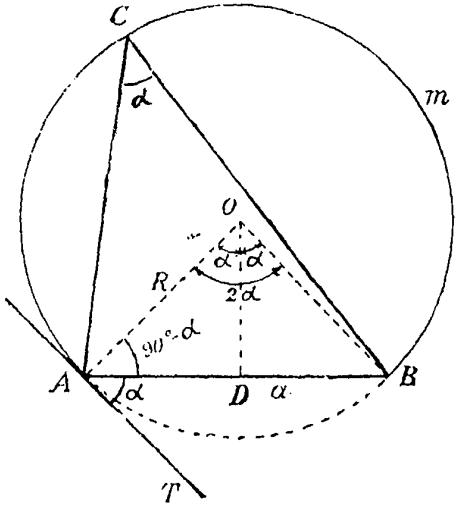


Рис. 23.

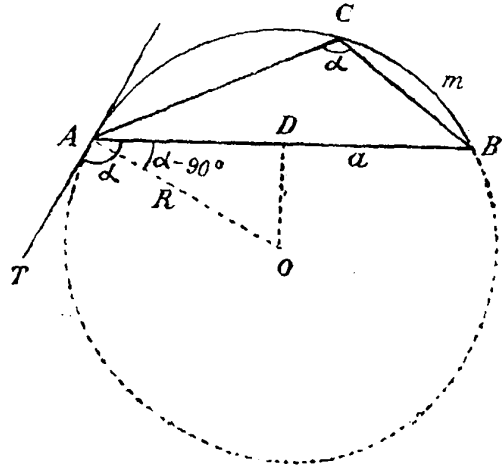


Рис 24.

DO; в точке пересечения O этих линий будет искомое место центра окружности.

В последнем случае сторона AO угла $\alpha-90°$ направлена по другую сторону линии AB, чем для случая $\alpha<90°$. Соединив любую точку C дуги AmB с концами линии AB, найдем, что угол $ACB=\alpha$. Радиус круга $R=AO$ получается в обоих случаях по формуле

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

§ 4. Величина квадрата стороны треугольника

1. Квадрат стороны, лежащей против острого угла A (рис. 25)

$$a^2=b^2+c^2-2cp,$$

где p — проекция стороны $AC=b$ на c.

2. Квадрат стороны, лежащей против тупого угла A (рис. 26)

$$a^2=b^2+c^2+2cp.$$

3. Теорема Пифагора (VI в. до н. э.) (рис. 27)

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 \quad \text{или}$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

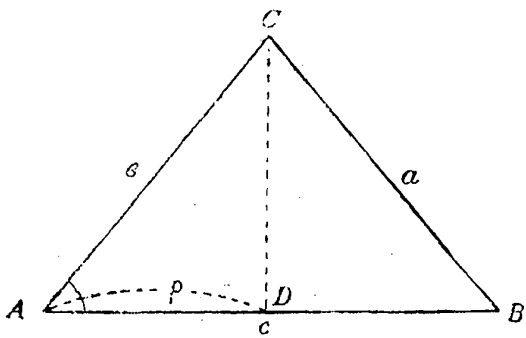


Рис. 25.

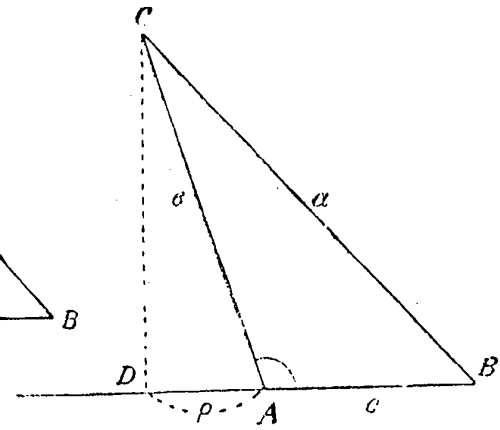


Рис. 26.

Теорему Пифагора формулируют так: квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на катетах.

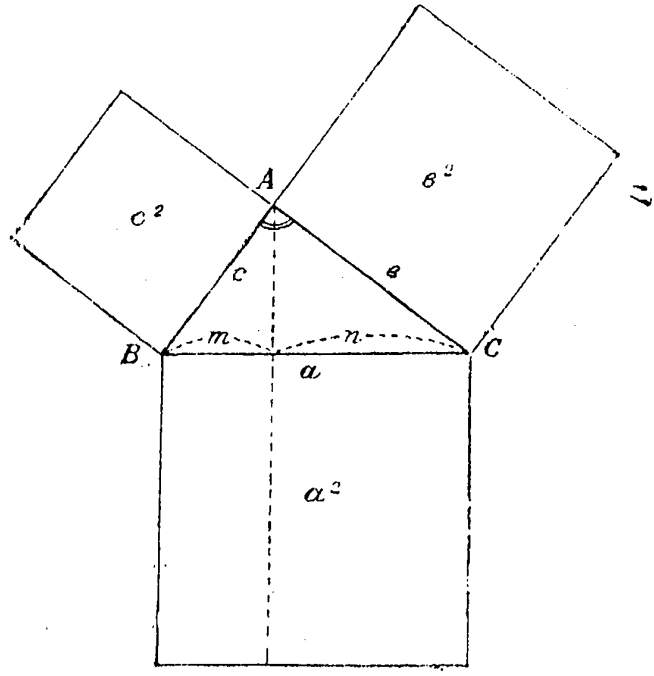


Рис. 27.

4. Если треугольник ABC вписан в полукруг (рис. 28), то он прямоугольный. Вершина прямого угла A находится на окружности. Радиус r окружности равен половине гипотенузы.

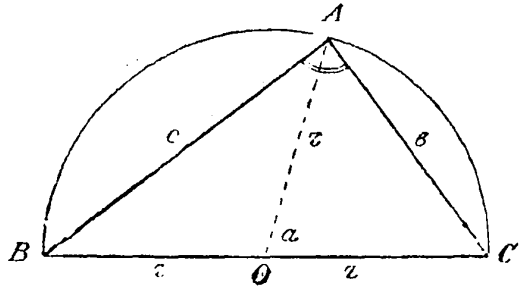


Рис. 28.

§ 5. Свойство внешних и внутренних секущих окружности

1. Произведение секущей MA (рис. 29) на внешнюю ее часть MB есть величина, построенная для данной точки M и равная квадрату касательной MT, то есть

$$MA \cdot MB = MD \cdot MC = MT^2; \qquad (1)$$

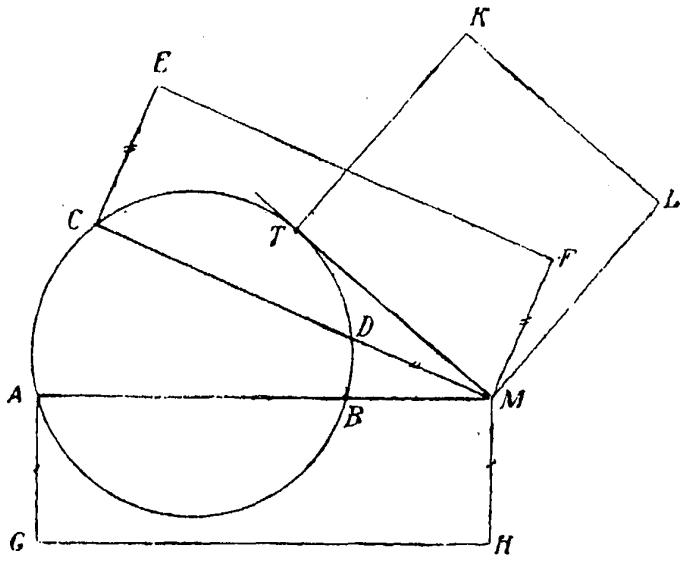


Рис. 29.

иными словами, площадь $MCEF = MAGH = MTKL$ или

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}, \qquad (2)$$

то есть длина касательной MT есть средняя пропорциональная между всей секущей MA и внешним ее отрезком MB (или MC и MD).

2. Произведение отрезков хорд (AB), проходящих через постоянную точку внутри круга, есть величина постоянная, равная, следо-

вательно, произведению отрезков диаметра (CD), проходящего через ту же точку, и квадрату половины хорды (A_1B_1), перпендикулярной этому диаметру (рис. 30): $AM \times MB = CM \times MD = A_1M^2$.

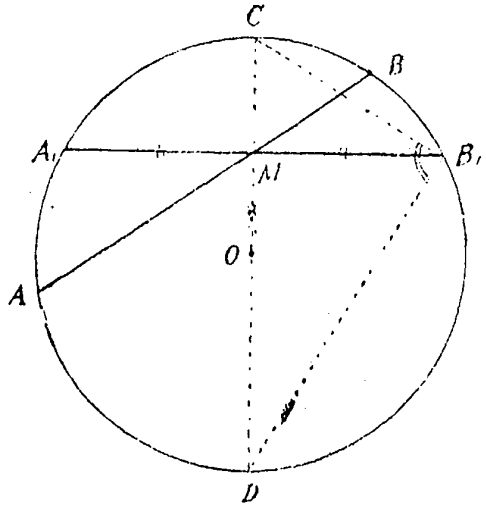


Рис. 30.

§ 6. Свойство биссектрис треугольника и перпендикуляра на гипотенузу

1. Биссектриса BD (рис. 31) угла B треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, т. е.

а) внутренняя биссектриса BD делит сторону AC в отношении

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}, \text{ откуда } \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC};$$

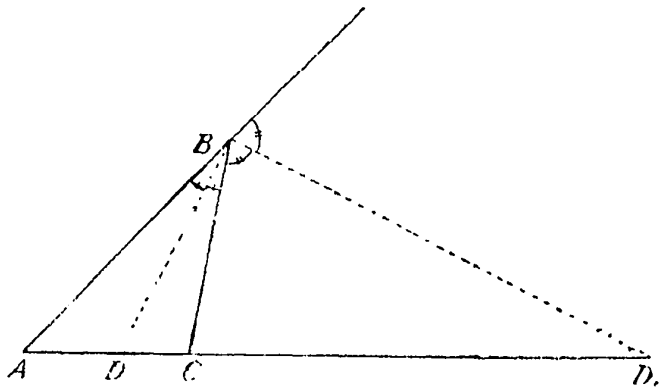


Рис. 31.

б) внешняя биссектриса BD_1 делит продолжение стороны AC в отношении

$$\frac{AD_1}{CD_1} = \frac{AB}{BC}, \text{ откуда } \frac{AD_1}{AB} = \frac{D_1C}{BC}.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 32), если AD есть перпендикуляр на гипотенузу, то, введя обозначения разных отрезков и сторон, как указано на рис. 32, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \text{ или } h^2=mn \\ &\frac{a}{c}=\frac{c}{m} \text{ » } c^2=am \\ &\frac{a}{b}=\frac{b}{n} \text{ » } b^2=an \end{aligned}\right\}$$

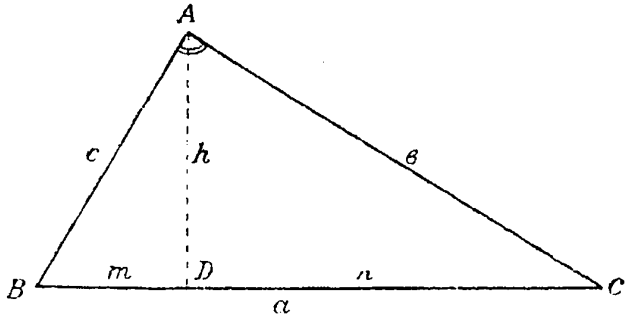


Рис. 32.

Эти выражения можно формулировать так: катеты есть средние пропорциональные между гипотенузой и прилежащими к ним отрезками гипотенузы. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы.

§ 7. Четыре замечательные точки в треугольнике

1. Перпендикуляры, восстановленные из середины каждой стороны пересекаются в одной точке C (центр описанного круга) (рис. 33).

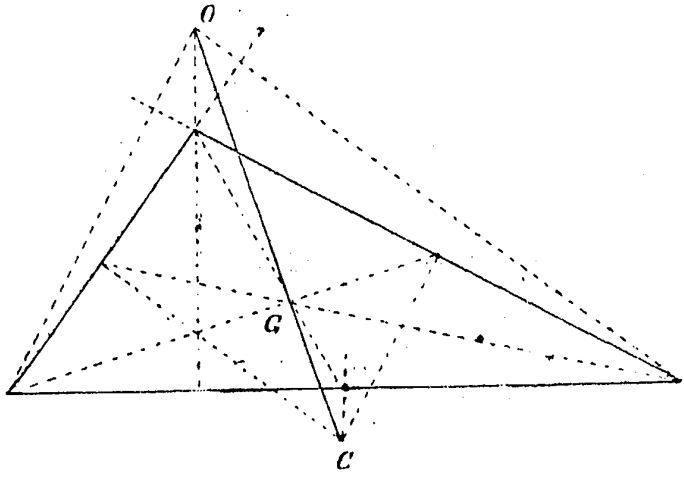


Рис. 33.

2. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке (центр вписанного круга).

3. Перпендикуляры, опущенные из вершины на противоположные стороны, пересекаются в одной точке O (так называемый ортоцентр).

4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке G; медианами называются прямые, соединяющие середины сторон с противолежащими вершинами. Точка G есть центр тяжести площади треугольника; она лежит на медиане в одной трети ее длины от соответствующего основания. Точки O, C и G лежат на одной прямой, причем точка G делит отрезок OC на две части, из коих одна вдвое больше другой.

Биссектриса, делящая угол A пополам, составляет с медианой делящей противолежащую сторону a пополам, угол ε, определяемый из выражения

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

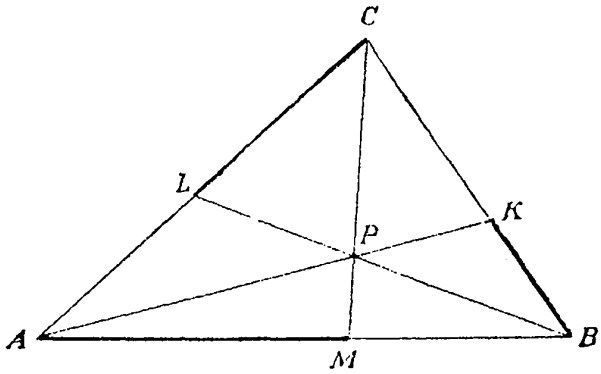


Рис. 34.

Длина медианы

$$m = \frac{1}{2}(b+c)\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\varepsilon}.$$

Кроме указанных выше четырех особых точек можно найти сколько угодно точек P, обладающих тем свойством, что в них пересекаются три луча, соединяющие точки K, L и M с противоположными вершинами (рис. 34). Для этого достаточно выбрать точки K, L и M на сторонах треугольника так, чтобы выполнить условие

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CL}{LA}\cdot\frac{AM}{MB} = 1.$$

Это предложение известно под названием теоремы Чевы.

§ 8. Пропорциональные линии в треугольнике; подобные и равные треугольники

1. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, например $MN \parallel AB$, делит две другие стороны на части пропорциональные (рис. 35), то есть:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC}.$$

2. Подобные треугольники. Две фигуры называются подобными, если углы одной из них равны соответственным углам другой, а соответственные стороны пропорциональны. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с двумя другими сторонами треугольник, подобный данному (рис. 35). Два треугольника подобны, если два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.

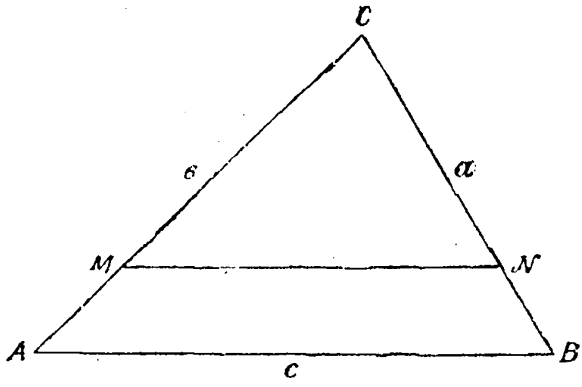


Рис. 35.

3. Равные треугольники или конгруентные — такие, которые могут быть наложены один на другой всеми своими точками.

Два треугольника равны между собой, если две стороны и угол, заключенный между ними в одном треугольнике, соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом треугольнике.

Два треугольника равны, если сторона и два прилежащие к ней угла в одном из них соответственно равны стороне и одинаково расположенным углам в другом.

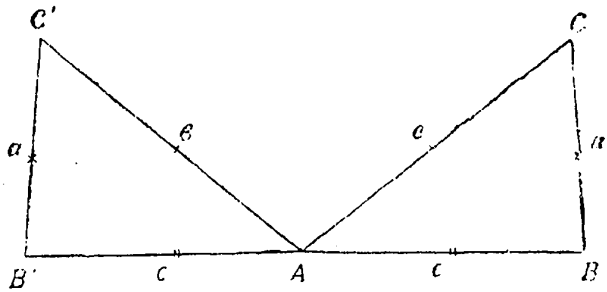


Рис. 36.

Два треугольника равны, если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника и одинаково расположены.

4. Если равные стороны или углы в обоих треугольниках расположены не одинаково, то такие треугольники не равны, а симметричны. Они не могут быть совмещены вращением в одной плоскости. Симметричные треугольники равновелики (рис. 36).

§ 9. Графическое умножение и деление

Графическое умножение и деление производится проще всего помощью построения подобных прямоугольных треугольников.

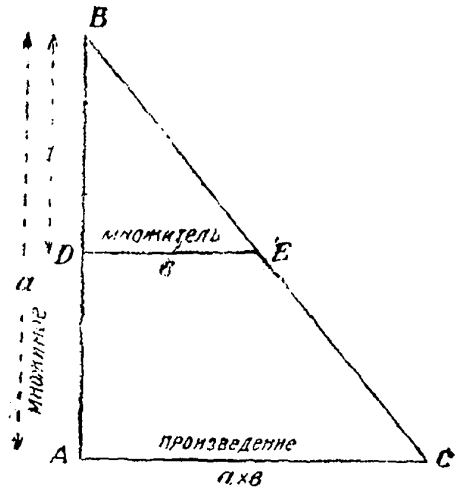


Рис. 37.

Умножение.

На одном катете (рис. 37) откладываем отрезок BA, равный числу единиц произвольной длины, заключающихся в множимом a, и длину BD, равную принятой единице; через точку D по перпендикуляру DE откладываем число единиц длины в множителе b; через точку A проводим катет, параллельный DE, и в точке C пересечения его с гипотенузой получаем отрезок AC, равный произведению $a \times b$.

Деление.

Строим прямоугольный треугольник CED (рис. 38), у которого катет $CD = b =$ делителю, катет $DE = 1$ принятого масштаба чертежа. По тому же катету CD откладываем отрезок $CA = a$, равный делимому. Через точку A проводим $AB \parallel DE$ до пересечения в точке B с гипотенузой CE, тогда $AB = \frac{a}{b} =$ искомому частному.

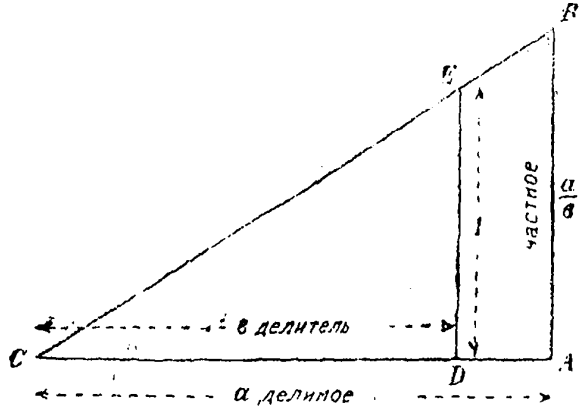


Рис. 38.

При таких графических построениях удобно пользоваться миллиметровой бумагой, причем можно обойтись без проведения параллельных линий помощью линейки и угольника или параллельной линейки.

§ 10. Выражение сторон a некоторых правильных многоугольников, вписанных в круг радиуса r

а) треугольник $a_3 = r\sqrt{3}$; г) восьмиугольник $a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

б) квадрат $a_4 = r\sqrt{2}$; д) десятиугольник $a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$;

в) шестиугольник $a_6 = r$; е) двенадцатиугольник $a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

ж) формула удвоения стороны правильного вписанного многоугольника (по стороне a_n найти сторону a_{2n}):

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}};$$

з) зависимость между сторонами правильного выписанного (a_n) многоугольника и описанного (b_n):

$$b_n = \frac{a_n r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}; \qquad a_n = \frac{b_n r}{\sqrt{r^2 + \frac{b_n^2}{4}}}.$$

§ 11. Общие формулы, относящиеся к разным плоским геометрическим фигурам

1. Треугольник (рис. 39). Сумма углов $A + B + C = 180^\circ$; площадь $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$*) $= r \cdot p = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

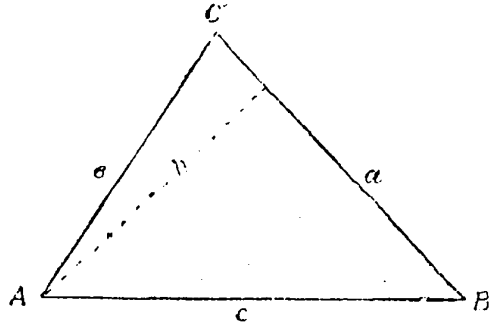


Рис. 39.

Здесь $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ = полупериметру.

r — радиус круга вписанного,

R „ „ описанного.

2. Прямоугольник — четыреугольник с взаимно перпендикулярными сторонами (a, b) (рис. 40). Параллельные его стороны равны между собой; площадь $S = a \times b = \frac{1}{2}d^2\sin\varepsilon$; диагональ $d = \sqrt{a^2+b^2}$; угол ε между диагоналями; $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2ab}{a^2-b^2}$; $\sin\varepsilon = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

3. Параллелограм — четыреугольник с попарно параллельными сторонами (рис. 41). Противоположные стороны равны и параллельны. Напри-

*) Формула принадлежит Герону (старшему) из Александрии (около 150 л. до н. э.)

мер $AB \neq CD$. Углы α и β дополняют один другого до π (180°). Диагонали вообще неравной длины ($d_1 > d_2$) делятся в точке O пополам, образуя острый угол λ, h_1 и h_2 — расстояния между параллельными сторонами. Площадь $S = ah_1 = bh_2 = ab\sin\alpha = ab\sin\beta = d_1 d_2 \sin\lambda$.

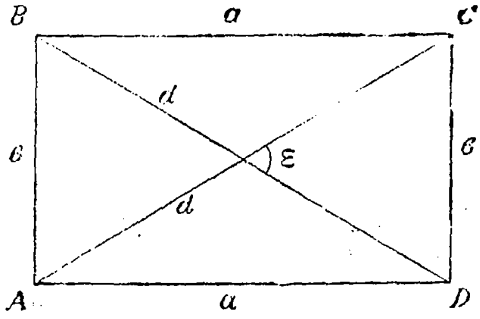


Рис. 40.

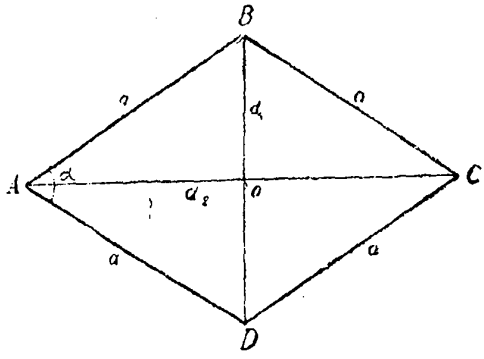


Рис. 42.

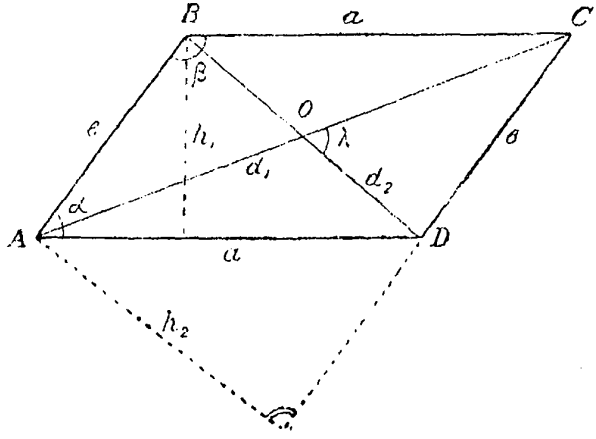


Рис. 41.

4. Ромб. Параллелограм с равными сторонами (рис. 42). Диагонали d_1, d_2 в точке пересечения O делятся пополам и взаимно перпендикулярны. Площадь $S = a^2 \sin\alpha = \frac{d_1 d_2}{2}$, где α — угол между соседними сторонами.

5. Четыреугольник. Всякая фигура, имеющая четыре стороны, называется четыреугольником (рис. 43). Сумма углов (внутренних) $A + B + C + D = 360°$. Площадь $S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f_2 = \frac{1}{2} f_1 f_2 \sin\varphi$; f_1 и f_2 — диагонали BD и AC; φ — угол между ними.

6. Четыреугольник, вписанный в круг (рис. 44). Свойство углов $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$. Площадь

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d);$$

диагонали f_1 и f_2

$$f_1^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)};$$

$$f_2^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{(ad+bc)};$$

$$f_1 f_2 = ac + bd;$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{ctg}^2\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \operatorname{ctg}^2\frac{D}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}.$$

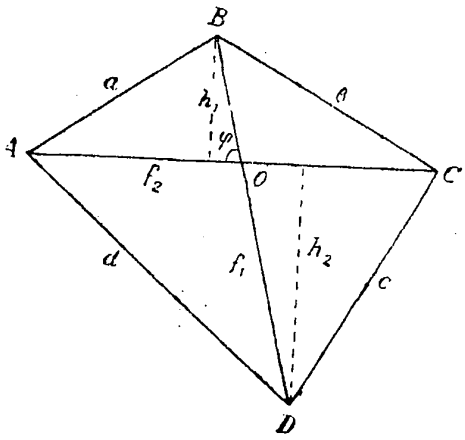


Рис. 43.

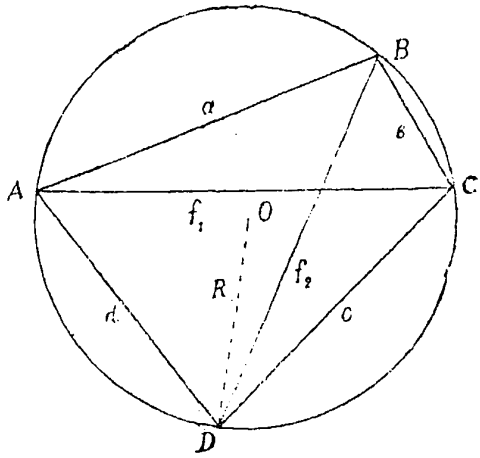


Рис. 44.

7. Четыреугольник, описанный около круга (рис. 45). Свойство сторон $a+c=b+d$. Площадь $S=pR$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ и R — радиус круга, вписанного в четыреугольник.

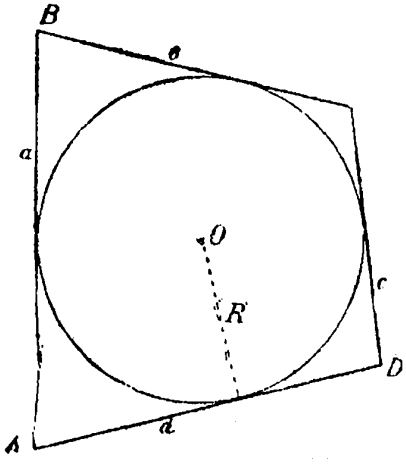


Рис. 45.

8. Трапеция — четыреугольник у которого две стороны параллельны (рис. 46). Площадь

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

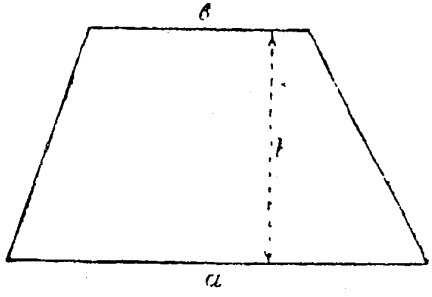


Рис. 46.

9. Круг. (рис. 47). Длина окружности $s=2\pi r=\pi d$. Площадь $S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$.

10. Сектор круговой *OACBO* (рис. 47).

Длина дуги $ACB=a=r\varphi=\pi r\left(\frac{\varphi^c}{180^\circ}\right)$.

Площадь $AOCBO=S=\frac{1}{2}ar=\frac{r^2\varphi}{2}=\pi r^2\left(\frac{\varphi^\circ}{360^\circ}\right)$.

Длина хорды $ADB=l=2r\sin\frac{\varphi}{2}$.

11. Сегмент круговой *ACB* (рис. 47).

Площадь $S=\frac{1}{2}r^2(\varphi-\sin\varphi)=\frac{1}{2}r^2\left[\pi\left(\frac{\varphi^\circ}{180^\circ}\right)-\sin\varphi\right]=\frac{r}{2}\left(a-r\sin\frac{a}{r}\right)$.

Приближенная формула $S=\frac{2}{3}hl$ или более точно

$$S=\frac{2}{3}hl+\frac{8}{15}\frac{h^3}{l}+\ldots\approx\frac{2}{3}hl+\frac{h^3}{2l}.$$

Высота сегмента h (стрелка) $=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2r\sin^2\frac{\varphi}{4}$. Стрелка h через половину хорды $\left(f=\frac{1}{2}l\right)$ (рис. 48). $h=\frac{f^2}{2r-h}$ или приближенно, если величина h малая, $h=\frac{f^2}{2r}$.

12. Круговое кольцо. Площадь $S=\pi(R^2-r^2)=4\pi\rho\varepsilon$;

$$\rho=\frac{1}{2}(R+r);\ \varepsilon=\frac{1}{2}(R-r).$$

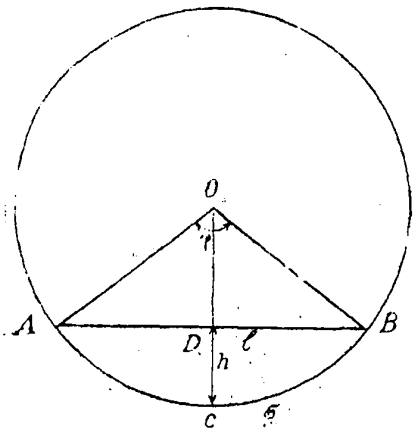


Рис. 47.

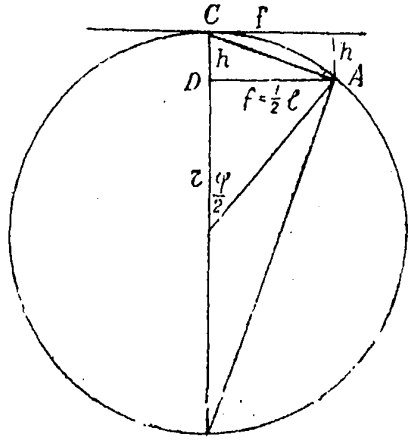


Рис. 48.

Часть площади, соответствующая центральному углу φ,

$$S_1=\frac{\varphi}{2}(R^2-r^2)=\frac{\pi\varphi^\circ}{360^\circ}(R^2-r^2)=2\varphi\rho\varepsilon.$$

13. Круговая лунка (рис. 49), образованная двумя окружностями радиуса r; расстояние между центрами $O_1O_2=\xi$.

Площадь $S=r^2(\pi+\sin\varphi-\varphi)=r^2\eta$.

Численные значения коэфициента η приведены в нижеследующей таблице, аргументом которой служит расстояние между центрами ξ, выраженное в десятых долях диаметра окружности.

ξ	0,1 d	0,2 d	0,3 d	0,4 d	0,5 d	0,6 d	0,7 d	0,8 d	0,9 d
η	0,40	0,79	1,18	1,56	1,91	2,25	2,55	2,81	3,02

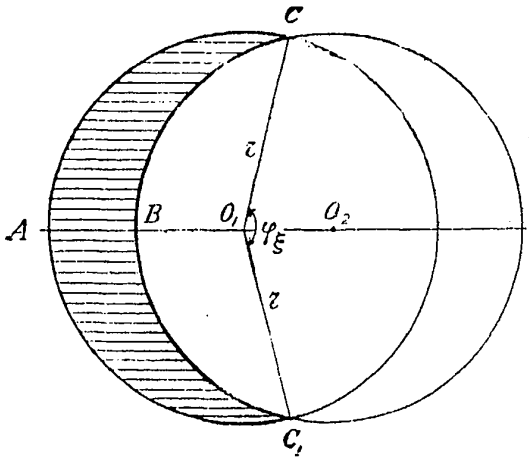


Рис. 49.

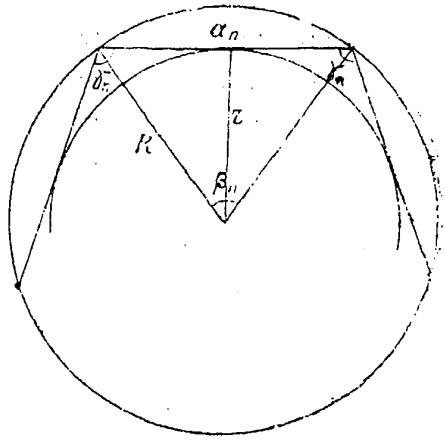


Рис. 50.

14. Правильный многоугольник (рис. 50).

r — радиус круга вписанного;

R — „ „ описанного;

a_n — длина стороны правильного вписанного n-угольника;

n — число сторон;

p — периметр многоугольника;

S — площадь его;

β_n — центральный угол, соответствующий стороне a_n;

γ_n — внутренний угол между двумя соседними сторонами многоугольника.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2R\sin\frac{\pi}{n} = 2r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \\ S &= \frac{n}{2}a_n r = \frac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \\ p &= na_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n} = 2nr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \\ \beta_n &= \frac{2\pi}{n}; \quad \gamma_n = \pi\left(\frac{n-2}{n}\right). \end{aligned}\right| \qquad (*)$$

15. Таблица значений элементов некоторых правильных вписанных многоугольников. Между числом сторон n правильного многоугольника, длиной стороны его a_n, радиусом круга вписанного r, радиусом круга описанного R и площадью S существуют соотношения, указанные формулами (*). Для главнейших многоугольников можно все указанные зависимости представить в виде таблицы.

n	$a:R$	$a:r$	$r:a$	$r:R$	$R:a$	$R:r$	$S:a^2$	$S:R^2$	$S:r^2$
3	1,7321	3,4641	0,2887	0,5000	0,5774	2,0000	0,4330	1,2990	5,1962
4	1,4142	2,0000	0,5000	0,7071	0,7071	1,4142	1,0000	2,0000	4,0000
5	1,1756	1,4531	0,6882	0,8090	0,8507	1,2361	1,7205	2,3776	3,6327
6	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660	1,0000	1,1547	2,5981	2,5981	3,4641
7	0,8678	0,9631	1,0383	0,9010	1,1524	1,1099	3,6339	2,7361	3,3710
8	0,7654	0,8284	1,2071	0,9239	1,3066	1,0824	4,8284	2,8284	3,3137
9	0,6840	0,7279	1,3737	0,9397	1,4619	1,0642	6,1818	2,8925	3,2757
10	0,6180	0,6498	1,5388	0,9511	1,6180	1,0515	7,6942	2,9389	3,2492
12	0,5176	0,5359	1,8660	0,9659	1,9319	1,0353	11,196	3,0000	3,2154
15	0,4158	0,4251	2,3523	0,9781	2,4049	1,0223	17,642	3,0505	3,1883
16	0,3902	0,3978	2,5137	0,9808	2,5629	1,0196	20,109	3,0615	3,1826
20	0,3129	0,3168	3,1569	0,9877	3,1962	1,0125	31,569	3,0902	3,1677
24	0,2611	0,2633	3,7979	0,9914	3,8306	1,0086	45,575	3,1058	3,1597

16. Построение правильных многоугольников. Всякий правильный многоугольник может быть графически построен следующим образом.

Проведем полуокружность радиусом OA, равным заданной стороне многоугольника, и разделим ее на столько равных частей, сколько сторон в многоугольнике (рис. 51). Проведем радиусы окружности через точки b, c, d, e и продолжим их. Ставим ножку циркуля в точку A и растворением циркуля, равным радиусу окружности, т. е. стороне многоугольника, засекаем радиус Ob, получим вершину B многоугольника. Из точки B тем же растворением циркуля засекаем радиус Oc и т. д. до точки F. Очевидно, что углы при вершинах многоугольника равны $\pi\frac{(n-2)}{n}$.

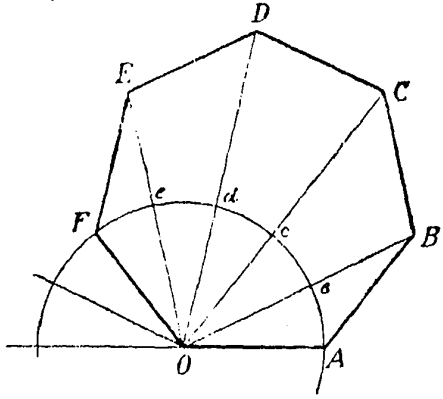


Рис. 51.

Для контроля точности графических действий следует сделать засечки, начиная от точки F в противоположном направлении, т. е. получить точки E, D, C и B.

17. Площадя неправильной формы вычисляют по формулам приближенного интегрирования, применяя формулы трапеций или Симпсона, или Чебышева (см. отдел II, главу 1, § 13, стр. 261).

§ 12. Таблица. Длина дуги σ, стрелки h, длина хорды l, площадь сегмента (радиус круга = 1) (рис. 47).

φ	Длина дуги σ	Стрелка h	Длина хорды l	Площадь сегмента	φ	Длина дуги σ	Стрелка h
1°	0,0175	0,0000	0,0175	0,00000	31°	0,5411	0,0364
2°	,0349	,0002	,0349	,00000	32°	,5585	,0387
3°	,0524	,0003	,0524	,00001	33°	,5760	,0412
4°	,0698	,0006	,0698	,00003	34°	,5934	,0437
5°	,0873	,0010	,0872	,00006	35°	,6109	,0463
6°	,1047	,0014	,1047	,00010	36°	,6283	,0489
7°	,1222	,0019	,1221	,00015	37°	,6458	,0517
8°	,1396	,0024	,1395	,00023	38°	,6632	,0545
9°	,1571	,0031	,1569	,00032	39°	,6807	,0574
10°	,1745	,0038	,1743	,00044	40°	,6981	,0603
11°	,1920	,0046	,1917	,00059	41°	,7156	,0633
12°	,2094	,0055	,2091	,00076	42°	,7330	,0664
13°	,2269	,0064	,2264	,00097	43°	,7505	,0696
14°	,2443	,0075	,2437	,00121	44°	,7679	,0728
15°	,2618	,0086	,2611	,00149	45°	,7854	,0761
16°	,2793	,0097	,2783	,00181	46°	,8029	,0795
17°	,2967	,0110	,2956	,00217	47°	,8203	,0829
18°	,3142	,0123	,3129	,00257	48°	,8378	,0865
19°	,3316	,0137	,3301	,00302	49°	,8552	,0900
20°	,3491	,0152	,3473	,00352	50°	,8727	,0937
21°	,3665	,0167	,3645	,00408	51°	,8901	,0974
22°	,3840	,0184	,3816	,00468	52°	,9076	,1012
23°	,4014	,0201	,3987	,00535	53°	,9250	,1051
24°	,4189	,0219	,4158	,00607	54°	,9425	,1090
25°	,4363	,0237	,4329	,00686	55°	,9599	,1130
26°	,4538	,0256	,4499	,00771	56°	,9774	,1171
27°	,4712	,0276	,4669	,00862	57°	,9948	,1212
28°	,4887	,0297	,4838	,00961	58°	1,0123	,1254
29°	,5061	,0319	,5008	,01067	59°	,0297	,1296
30°	,5236	,0341	,5176	,01180	60°	,0472	,1340
31°	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301	61°	1,0647	0,1384

Продолжение

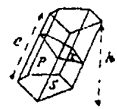
φ	Длина хорды l	Площадь сегмента	φ	Длина дуги c	Стрелка h	Длина хорды l	Площадь сегмента
31°	0,5345	0,01301	61°	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502
32°	,5513	,01429	62°	,0821	,1428	,0301	,09958
33°	,5680	,01566	63°	,0996	,1474	,0450	,10428
34°	,5847	,01711	64°	,1170	,1520	,0598	,10911
35°	,6014	,01864	65°	,1345	,1566	,0746	,11408
36°	,6180	,02027	66°	,1519	,1613	,0893	,11919
37°	,6346	,02198	67°	,1694	,1661	,1039	,12443
38°	,6511	,02378	68°	,1868	,1710	,1184	,12982
39°	,6676	,02568	69°	,2043	,1759	,1328	,13535
40°	,6840	,02767	70°	,2217	,1808	,1472	,14102
41°	,7004	,02976	71°	,2392	,1859	,1614	,14683
42°	,7167	,03195	72°	,2566	,1910	,1756	,15279
43°	,7330	,03425	73°	,2741	,1961	,1896	,15889
44°	,7492	,03664	74°	,2915	,2014	,2036	,16514
45°	,7654	,03915	75°	,3090	,2066	,2175	,17154
46°	,7815	,04176	76°	,3265	,2120	,2313	,17808
47°	,7975	,04448	77	,3439	,2174	,2450	,18477
48°	,8135	,04731	78°	,3614	,2229	,2586	,19160
49°	,8294	,05025	79°	,3788	,2284	,2722	,19859
50°	,8452	,05331	80°	,3963	,2340	,2856	,20573
51°	,8610	,05649	81°	,4137	,2396	,2989	,21301
52°	,8767	,05978	82°	,4312	,2453	,3121	,22045
53°	,8924	,06319	83°	,4486	,2510	,3252	,22804
54°	,9080	,06673	84°	,4661	,2569	,3383	,23578
55°	,9235	,07039	85°	,4835	,2627	,3512	,24367
56°	,9389	,07417	86°	,5010	,2686	,3640	,25171
57°	,9543	,07808	87°	,5184	,2746	,3767	,25990
58°	,9696	,08212	88°	,5359	,2807	,3893	,26825
59°	,9848	,08629	89°	,5533	,2867	,4018	,27675
60°	1,0000	,09059	90°	,5708	,2929	,4142	,28540
61°	1,0151	0,09502	91°	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420

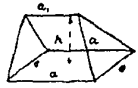
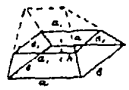
φ	Длина дуги σ	Стрелка h	Длина хорды l	Площадь сегмента	φ	Длина дуги σ	Стрелка h
91°	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420	121°	2,1118	0,5076
92°	,6057	,3053	,4387	,30316	122°	,1293	,5152
93°	,6232	,3116	,4507	,31226	123°	,1468	,5228
94°	,6406	,3180	,4627	,32152	124°	,1642	,5305
95°	,6581	,3244	,4746	,33093	125°	,1817	,5383
96°	,6755	,3309	,4863	,34050	126°	,1991	,5460
97°	,6930	,3374	,4979	,35021	127°	,2166	,5538
98°	,7104	,3439	,5094	,36008	128°	,2340	,5616
99°	,7279	,3506	,5208	,37009	129°	,2515	,5695
1 00°	,7453	,3572	,5321	,38026	130°	,2689	,5774
101°	,7628	,3639	,5432	,39058	131°	,2864	,5853
102°	,7802	,3707	,5543	,40104	132°	,3038	,5933
103°	,7977	,3775	,5652	,41166	133°	,3213	,6013
104°	,8151	,3843	,5760	,42242	134°	,3387	,6093
105°	,8326	,3912	,5867	,43333	135°	,3562	,6173
106°	,8500	,3982	,5973	,44439	136°	,3736	,6254
107°	,8675	,4052	,6077	,45560	137°	,3911	,6335
108°	,8850	,4122	,6180	,46695	138°	,4086	,6416
109°	,9024	,4193	,6282	,47845	139°	,4260	,6498
110°	,9199	,4264	,6383	,49008	140°	,4435	,6580
111°	,9373	,4336	,6483	,50187	141°	,4609	,6662
112°	,9548	,4408	,6581	,51379	142°	,4784	,6744
113°	,9722	,4481	,6678	,52586	143°	,4958	,6827
114°	1,9897	,4554	,6773	,53806	144°	,5133	,6910
115°	2,0071	,4627	,6868	,55041	145°	,5307	,6993
116°	,0246	,4701	,6961	,56289	146°	,5482	,7076
117°	,0420	,4775	,7053	,57551	147°	,5656	,7160
118°	,0595	,4850	,7143	,58827	148°	,5831	,7244
119°	,0769	,4925	,7233	,60116	149°	,6005	,7328
120°	,0944	,5000	,7321	,61418	150°	,6180	,7412
121°	2,1118	0,5076	1,7407	0,62734	151°	2,6354	0,7496

°	Длина хорды l	Площадь сегмента	°	Длина дуги c	Стрелка h	Длина хорды l	Площадь сегмента
121°	1,7407	0,62734	151°	2,6354	0,7496	1,9363	1,07532
122°	,7492	,64063	152°	,6529	,7581	,9406	,09171
123°	,7576	,65404	153°	,6704	,7666	,9447	,10818
124°	,7659	,66759	154°	,6878	,7750	,9487	,12472
125°	,7740	,68125	155°	,7053	,7836	,9526	,14132
126°	,7820	,69505	156°	,7227	,7921	,9563	,15799
127°	,7899	,70897	157°	,7402	,8006	,9598	,17472
128°	,7976	,72301	158°	,7576	,8092	,9633	,19151
129°	,8052	,73716	159°	,7751	,8178	,9665	,20835
130°	,8126	,75114	160°	,7925	,8264	,9696	,22525
131°	,8199	,76584	161°	,8100	,8350	,9726	,24221
132°	,8271	,78034	162°	,8274	,8436	,9754	,25921
133°	,8341	,79497	163°	,8449	,8522	,9780	,27626
134°	,8410	,80970	164°	,8623	,8608	,9805	,29335
135°	,8478	,82454	165°	,8798	,8695	,9829	,31049
136°	,8544	,83949	166°	,8972	,8781	,9851	,32766
137°	,8608	,85455	167°	,9147	,8868	,9871	,34487
138°	,8672	,86971	168°	,9322	,8955	,9890	,36212
139°	,8733	,88497	169°	,9496	,9042	,9908	,37940
140°	,8794	,90034	170°	,9671	,9128	,9924	,39671
141°	,8853	,91580	171°	2,9845	,9215	,9938	,41404
142°	,8910	,93135	172°	3,0020	,9302	,9951	,43140
143°	,8966	,94700	173°	,0194	,9390	,9963	,44878
144°	,9021	,96274	174°	,0369	,9477	,9973	,46617
145°	,9074	,97858	175°	,0543	,9564	,9981	,48359
146°	,9126	0,99449	176°	,0718	,9651	,9988	,50101
147°	,9176	1,01050	177°	,0892	,9738	,9993	,51845
148°	,9225	,02658	178°	,1067	,9825	,9997	,53589
149°	,9273	,04275	179°	,1241	,9913	1,9999	,55334
150°	,9319	,05900	180°	,1416	1,0000	2,0000	,57080
151°	1,9363	1,07532	181°	3,1590	1,0087	1,9999	1,58825

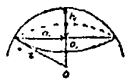
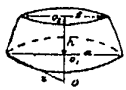
§ 13. Формулы, относящиеся к разным геометрическим телам

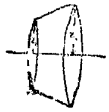
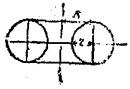
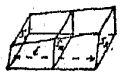
S — площадь основания; Q — поверхность; V — объем

Название геометрического тела	Поверхность Q	Объем V	Примечание
1. Куб a — сторона куба	$6a^2$ (полная)	a^3	$d = a\sqrt{3}$ диагональ
2. Прямоугольный параллелепипед l, b, h размеры его	$2(lb + lh + bh)$ (полная)	lbh	$d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ диагональ
3. Правильная шестигранная призма Рис. 52.	$6ah = 2\sqrt{3}fh = 3{,}464fh$ (боковая) $\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = 2{,}598a^2$ (площадь основания) $6a\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) =$ $= 6a(h + 0{,}866a)$ (полная)	$\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2h = 2{,}6a^2h =$ $= \frac{1}{2}\sqrt{3}f^2h =$ $= 0{,}866f^2h$	f — расстояние между параллельными сторонами (рис. 52)
4. Правильная восьмигранная призма	$8ah = \frac{8}{1+\sqrt{2}} \cdot fh =$ $= 3{,}314fh$ (боковая) $2(1+\sqrt{2})a^2 = 4{,}828a^2$ (площадь основания) $8a\left[h + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)a\right] =$ $= 8a(h + 1{,}207a)$ (полная)	$2(\sqrt{2}+1)a^2h =$ $= 4{,}828a^2h =$ $= \left(\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)f^2h =$ $= 0{,}829f^2h$	значение f см. выше (рис. 52)
5. Любая призма или цилиндр  Рис. 53.	(боковая) равна произведению периметра p нормального сечения на боковое ребро l pl	Площадь основания $S \times$ на высоту h Sh	p — периметр нормального сечения Σ
6. Трехгранная призма, усеченная не параллельно основанию		$\frac{1}{3}(a + b + c)S$	S — площадь нормального сечения; a, b, c — длины ребер
7. Пирамида (правильная) или конус	Периметр основания (p) $\times$ на половину апофемы (l) $\frac{pl}{2}$	$\frac{1}{3}Sh$	апофема l = высоте треугольной грани пирамиды; в случае конуса l — образующая

Название геометрического тела	Поверхность Q	Объем V	Примечание
8. Усеченная пирамида или конус Рис. 54.	Боковая поверхность равна полусумме периметров оснований × на апофему	$\frac{h}{3}(S+s+\sqrt{Ss})$	S и s — площади верхнего и нижнего оснований пирамиды или конуса. Апофема — высота боковой грани
9. Клин (крыша)  Рис. 55.		$\frac{1}{6}(2a+a_1)bh$	
10. Усеченный клин (обелиск)  Рис. 56.		$\frac{h}{6}[ab+(a+a_1)\times$ $\times(b+b_1)+a_1b_1]$	
11. Любая пирамида или конус (наклонные)		$\frac{1}{3}$ площади основания × на высоту (т. е. на расстояние от вершины до плоскости основания)	
12. Круговой цилиндр	боковая $2\pi rh$ полная $2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$	r — радиус основания; h — высота
13. Усеченный прямой круговой цилиндр	$\pi r(a_1+a_2)$ (боковая)	$\pi r^2\frac{a_1+a_2}{2}$	a_1 — наибольшая образующая цилиндра; a_2 — наименьшая образующая цилиндра
14. Труба (полый цилиндр) R и r — радиусы основания	$2\pi Rh$ (внешняя) $2\pi rh$ (внутренняя)	$\pi h\cdot(R^2-r^2)=4\pi h\rho s$	$\rho=\frac{1}{2}(R+r)$ $s=\frac{1}{2}(R-r)$
15. Прямой круговой конус	боковая $\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi ra$ полная $\pi r(r+a)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\sqrt{r^2+h^2}=a$ длина образующей; r — радиус основания; h — высота

Продолжение

Название геометрического тела	Поверхность Q	Объем V	Примечание
16. Усеченный конус	боковая $\pi a (R+r)$ полная $\pi [R^2 + r^2 + a(R+r)]$	$\frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr)$	$a = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$ есть образующая
17. Шар r — радиус D — диаметр	$4\pi r^2 = 12{,}5664 r^2 = \pi D^2 = 3{,}141 D^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}1888 r^3 = \frac{\pi}{6} D^3 = 0{,}5236 D$	
18. Полый шар R и r — радиусы D и d — диаметры		$\frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) = 4{,}1888 (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3) = 4\pi R_m^2 t + \frac{\pi}{3} t^3$	$R_m = \frac{1}{2}(R+r)$ t — толщина оболочки
19. Шаровой сегмент  Рис. 57.	$2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$	$\frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$	$a = \sqrt{h(2r-h)}$ a — радиус основания сегмента; h — высота сегмента; r — радиус шара
20. Шаровой пояс  Рис. 58.	$2\pi r h$	$\frac{1}{6}\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$	$r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$ r — радиус шара; h — высота пояса; a, b — радиусы оснований
21. Шаровой сектор Рис. 59.	Полная поверхность $\pi r (2h + a)$	$\frac{2}{3}\pi r^2 h$	r — радиус шара; h — высота сектора; a — радиус основания
22. а) Эллипсоид; б) Эллипсоид вращения (вокруг оси a); в) Эллипсоид вращения (вокруг оси b)		$\frac{4}{3}\pi abc$ $\frac{4}{3}\pi a b^2$ $\frac{4}{3}\pi a^2 b$	a, b, c — полуоси эллипсоида
23. Параболоид вращения		$\frac{\pi}{2} r^2 h = \frac{1}{2}$ объема описанного цилиндра	r — радиус кругового основания; h — высота

Название геометрического тела	Поверхность Q	Объем V	Примечание
24. Слой параболоида вращения (усеченный)  Рис. 60.		$\frac{\pi}{2} h (r_1^2 + r_2^2)$	r_1 и r_2 — радиусы поперечных сечений параболоида
25. Тор (круговое кольцо)  Рис. 61.	$4\pi^2 R \cdot r = 39{,}478 Rr$	$2\pi^2 Rr^2 = 19{,}739 Rr^2$	$2r$ — толщина тора; R — радиус тора
26. Боченок		а) $\frac{4}{15}\pi h \left(2R^2 + Rr - \frac{3}{4} r^2\right) = 0{,}83776 h \left(2R^2 + Rr - \frac{3}{4} r^2\right)$ случай параболической формы меридианного сечения б) приблизительно: $\frac{1}{3}\pi h (2R^2 + r^2) = 1{,}0472 h (2R^2 + r^2)$ случай круговой формы меридианного сечения	r — радиус дна; R — радиус среднего сечения; h — высота
27. Призматоид — тело, ограниченное 2 параллельными основаниями и произвольным числом боковых плоских граней  Рис. 62.		$\frac{l}{3}\left[\frac{1}{2}(S_1 + S_2) + 2S_m\right]$	l — расстояние между параллельными гранями; S_1 и S_2 — площади этих граней; S_m — площадь среднего сечения, т. е. сечения, находящегося точно посередине между параллельными гранями

28. Объемы тел неправильной формы вычисляют по правилу нахождения приближенных значений определенных интегралов (см. отдел II, главу 1, § 13), применяя формулы трапеций или правило Симпсона. В этих формулах под y_i надо понимать площади поперечных сечений тела неправильной формы, причем эти сечения проводят через равные промежутки, а площади этих сечений вычисляют, как сказано в § 11 13 отд. II, как площади фигур неправильной формы.

Глава 3

ПЛОСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Тригонометрия

Стр.

§ 1. Разные способы измерения углов 91
§ 2. Определение тригонометрических функций угла. Графики тригонометрических функций для углов от 0° до 180° 94
§ 3. Связь между функциями одного и того же аргумента 98
§ 4. Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций . . . 100
§ 5. Формулы сумм и разностей тригонометрических функций 100
§ 6. Тригонометрические функции двойных, тройных и кратных углов . 101
§ 7. Тригонометрические функции половинных углов 102
§ 8. Некоторые полезные формулы 102
§ 9. Суммы sin-ов и cos-ов углов, возрастающих в арифметической прогрессии 103
§ 10. Вторые, третьи и n-ые степени тригонометрических функций 103
§ 11. Тригонометрические функции малых углов 105
§ 12. Обратные тригонометрические функции (круговые функции). Графики обратных тригонометрических функций 105
§ 13. Решение некоторых тригонометрических уравнений 107

II. Решение плоских треугольников

§ 14. Общие формулы. Прямоугольные треугольники и косоугольные треугольники 112
§ 15. Различные случаи решения косоугольных треугольников 114
§ 16. Круг, описанный около треугольника 117
§ 17. Круг, вписанный в данный треугольник 118

I. ГОНИОМЕТРИЯ

§ 1. Разные способы измерения углов

Способ измерения углов градусами, минутами и секундами.
Способ измерения углов во временной мере.
Способ измерения углов радианами.

А. Измерение углов градусами, минутами и секундами

За единицу угла в этой системе принят градус, равный одной девяностой части прямого угла или центральному углу, соответствующему одной трista шестидесятой доле окружности. Градус (°) делится на 60 частей, называемых минутами (′); минута делится на 60 частей, называемых секундами (″).

Б. Измерение углов во временной мере часами, минутами и секундами (временными)

Измерение основано на том, что время численно равно часовому углу соответствующей точки небесной сферы (среднее Солнце или точка Овна). Связь между градусными и временными мерами устанавливается из следующих соотношений:

24^h	соответствуют	360°	или	1°	соответствует	4^m
1^h	„	15°	„	$1'$	„	4^s
1^m	„	$15'$	„	$1''$	„	$\frac{1^s}{15}=0^s,0667$
1^s	„	$15''$				

Перевод углов из градусной меры во временную и обратно упрощается таблицей № 44 Мореходных таблиц 1943 г.

В. Измерение углов радианами

Единицей для измерения углов радианами принят центральный угол, стягиваемый такой дугой, длина которой равна радиусу. Если положить радиус дуги круга равным единице, то радианная мера угла численно будет равна длине дуги. Во всех математических формулах обычно предполагается, что углы выражены в радианах. Для простоты письма знак радиана обычно не пишут при том числе, которое показывает, сколько в данном угле радианов.

Аналитическая мера угла в 180° равна $\pi=3{,}14159265\ldots$

Градусная мера угла в $\pi=3{,}141592\ldots$ радиана равна 180°.

Градусная мера угла в 1 радиан равна

$$\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ 17'44'',8062$$

или

$$1 \text{ радиан } \rho=57^\circ,29577\,951\ldots=3437',746\,771\ldots=206264'',8062\ldots \quad (1)$$

Обратно градусные меры выражаются через радиан таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \text{arc } 1^\circ &= \frac{1}{57{,}2957795} = 0{,}01745\,32925\ldots \\ \text{arc } 1' &= \frac{1}{3437{,}74677} = 0{,}00029\,08882\,087\ldots \\ \text{arc } 1'' &= \frac{1}{206264{,}806} = 0{,}00000\,48481\,36811\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Отсюда следует, что если угол y выражен в радианах, то для получения его меры x в градусных единицах величину y следует помножить на величину одного радиана в градусах, минутах или секундах в зависимости от того, в каких единицах надо получить выражение для угла, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x^\circ &= 57{,}295779\ y = \frac{180^\circ}{\pi}\ y \\ x' &= 3437{,}747\,y = \frac{180^\circ \cdot 60}{\pi}\ y \\ x'' &= 206264''{,}8\ y = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} y \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Обратно, чтобы градусную меру угла выразить в радианах, эту последнюю надо разделить на величину радиана в градусах, минутах или секундах, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^\circ}{57{,}295779} = \frac{x^\circ}{180^\circ}\pi \\ y &= \frac{x'}{3437{,}747} = \frac{x'}{180 \cdot 60}\pi \\ y &= \frac{x''}{206264{,}8} = \frac{x''}{180 \cdot 60 \cdot 60}\pi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Для перевода градусной меры в радианы можно пользоваться таблицей № 56 Мореходных таблиц 1943 г. или помещенной на стр. 93 вспомогательной таблицей, по которой удобно переводить радианы в градусы и обратно.

Г. Главнейшие и простые углы

Углы выражены в радианах и градусной мере в приведенной таблице.

Градусная мера	В радианах	Градусная мера	В радианах
15°	$\frac{1}{12}\pi = 0{,}2618$	60°	$\frac{1}{3}\pi = 1{,}0472$
18	$\frac{1}{10}\pi = 0{,}3142$	72	$\frac{2}{5}\pi = 1{,}2566$
$22\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}\pi = 0{,}3927$	75	$\frac{5}{12}\pi = 1{,}3090$
30	$\frac{1}{6}\pi = 0{,}5236$	90	$\frac{1}{2}\pi = 1{,}5708$
36	$\frac{1}{5}\pi = 0{,}6283$	120	$\frac{2}{3}\pi = 2{,}0944$
45	$\frac{1}{4}\pi = 0{,}7854$	150	$\frac{10}{12}\pi = 2{,}6180$
		180	$\pi = 3{,}1416$

Таблица перевода радианов в градусы и обратно

Радианы	Градусы	Радианы	Градусы	Градусы	Радианы	Градусы	Радианы	Минуты	Радианы
0r,00	0°,000	0r,50	28°,648	0	0r,00000	50°	0r,87266	0′	0r,00000
,01	0 ,573	,51	29 ,221	1	,01745	51	,89012	1	029
,02	1 ,146	,52	29 ,794	2	,03491	52	,90757	2	058
,03	1 ,719	,53	30 ,367	3	,05236	53	,92502	3	087
,04	2 ,292	,54	30 ,940	4	,06981	54	,94248	4	116
0 ,05	2 ,865	0 ,55	31 ,513	5	0 ,08727	55	0 ,95993	5	0 ,00145
,06	3 ,438	,56	32 ,086	6	,10472	56	,97738	6	175
,07	4 ,011	,57	32 ,659	7	,12217	57	0 ,99484	7	204
,08	4 ,584	,58	33 ,232	8	,13963	58	1 ,01229	8	233
,09	5 ,157	,59	33 ,805	9	,15708	59	,02974	9	262
0 ,10	5 ,730	0 ,60	34 ,377	10	0 ,17453	60	1 ,04720	10	0 ,00291
,11	6 ,303	,61	34 ,950	11	,19199	61	,06465	11	320
,12	6 ,875	,62	35 ,523	12	,20944	62	,08210	12	349
,13	7 ,448	,63	36 ,096	13	,22689	63	,09956	13	378
,14	8 ,021	,64	36 ,669	14	,24435	64	,11701	14	407
0 ,15	8 ,594	0 ,65	37 ,242	15	0 ,26180	65	1 ,13446	15	0 ,00436
,16	9 ,167	,66	37 ,815	16	,27925	66	,15192	16	465
,17	9 ,740	,67	38 ,388	17	,29671	67	,16937	17	495
,18	10 ,313	,68	38 ,961	18	,31416	68	,18682	18	524
,19	10 ,886	,69	39 ,534	19	,33161	69	,20428	19	553
0 ,20	11 ,459	0 ,70	40 ,107	20	0 ,34907	70	1 ,22173	20	0 ,00582
,21	12 ,032	,71	40 ,680	21	,36652	71	,23918	21	611
,22	12 ,605	,72	41 ,253	22	,38397	72	,25664	22	640
,23	13 ,178	,73	41 ,826	23	,40143	73	,27409	23	669
,24	13 ,751	,74	42 ,399	24	,41888	74	,29154	24	698
0 ,25	14 ,324	0 ,75	42 ,972	25	0 ,43633	75	1 ,30900	25	0 ,00727
,26	14 ,897	,76	43 ,545	26	,45379	76	,32645	26	756
,27	15 ,470	,77	44 ,118	27	,47124	77	,34390	27	785
,28	16 ,043	,78	44 ,691	28	,48869	78	,36136	28	814
,29	16 ,616	,79	45 ,264	29	,50615	79	,37881	29	844
0 ,30	17 ,189	0 ,80	45 ,837	30	0 ,52360	80	1 ,39626	30	0 ,00873
,31	17 ,762	,81	46 ,410	31	,54105	81	,41372	31	902
,32	18 ,335	,82	46 ,983	32	,55851	82	,43117	32	931
,33	18 ,908	,83	47 ,555	33	,57596	83	,44862	33	960
,34	19 ,481	,84	48 ,128	34	,59341	84	,46608	34	989
0 ,35	20 ,054	0 ,85	48 ,701	35	0 ,61087	85	1 ,48353	35	0 ,01018
,36	20 ,626	,86	49 ,274	36	,62832	86	,50098	36	1047
,37	21 ,199	,87	49 ,847	37	,64577	87	,51844	37	1076
,38	21 ,772	,88	50 ,420	38	,66323	88	,53589	38	1105
,39	22 ,345	,89	50 ,993	39	,68068	89	,55334	39	1134
0 ,40	22 ,918	0 ,90	51 ,566	40	0 ,69813	90	1 ,57080	40	0 ,01164
,41	23 ,491	,91	52 ,139	41	,71558	91	,58825	41	1193
,42	24 ,064	,92	52 ,712	42	,73304	92	,60570	42	1222
,43	24 ,637	,93	53 ,285	43	,75049	93	,62316	43	1251
,44	25 ,210	,94	53 ,858	44	,76794	94	,64061	44	1280
0 ,45	25 ,783	0 ,95	54 ,431	45	0 ,78540	95	1 ,65806	45	0 ,01309
,46	26 ,356	,96	55 ,004	46	,80285	96	,67552	46	1338
,47	26 ,929	,97	55 ,577	47	,82030	97	,69297	47	1367
,48	27 ,502	,98	56 ,150	48	,83776	98	,71042	48	1396
,49	28 ,075	,99	56 ,723	49	,85521	99	,72788	49	1425
0 ,50	28 ,648	1 ,00	57 ,296	50	0 ,87266	100	1 ,74533	50	0 ,01454
								51	1484
								52	1513
2r,00	114°,592			200°	3r,49066			53	1542
3 ,00	171 ,887			300	5 ,23599			54	1571
4 ,00	229 ,183			400	6 ,98132			55	0 ,01600
5 ,00	286 ,479			500	8 ,72665			56	1629
6 ,00	343 ,775			600	10 ,47198			57	1658
7 ,00	401 ,070			700	12 ,21730			58	1687
8 ,00	458 ,366			800	13 ,96263			59	1716
9 ,00	515 ,662			900	15 ,70796			60	0 ,01745
10 ,00	572 ,958			1000	17 ,45329				

§ 2. Определение тригонометрических функций угла (рис. 64)

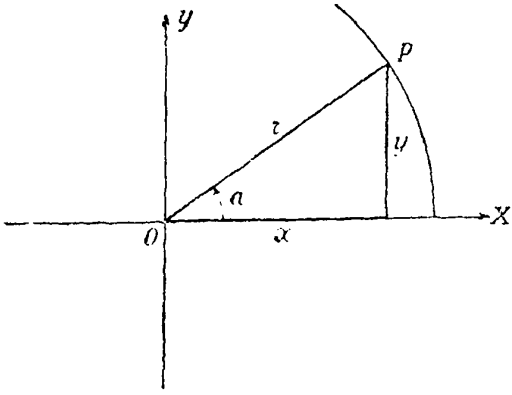


Рис. 64.

$$\sin a = \frac{y}{r}; \quad \cos a = \frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg} a = \frac{x}{y};$$

$$\sec a = \frac{r}{x}; \quad \operatorname{cosec} a = \frac{r}{y}.$$

Тригонометрические функции угла суть отвлеченные числа, представляющие отношения двух линий.

r — величина существенно положительная.

x и y — имеют различные знаки в разных четвертях, как показано на рис. 65. Поэтому и знаки тригонометрических функций будут разные в разных четвертях, как указано ниже в таблице.

Знаки тригонометрических функций в разных четвертях

Тригоном. функции / Четверть	sin a	cos a	tg a	ctg a	sec a	cosec a
I (от 0° до 90°)	+	+	+	+	+	+
II (от 90° до 180°)	+	−	−	−	−	+
III (от 180° до 270°)	−	−	+	+	−	−
IV (от 270° до 360°)	−	+	−	−	+	−

Если радиус r положить равным единице, то тригонометрические функции разных углов можно рассматривать как некоторые линии

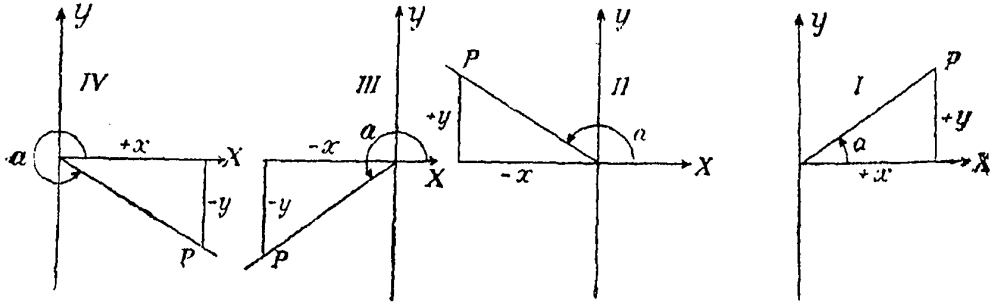


Рис. 65.

в окружности радиуса 1; называются они иногда поэтому тригонометрическими линиями, но выражаются они отвлеченными числами, так как представляют собой и в этом случае отношение некоторой длины к длине, принимаемой за единицу, как показано на рис. 66 для первой четверти.

$$\sin a = \frac{\overline{PA}}{r} = \frac{\overline{PA}}{1}; \qquad \cos a = \frac{\overline{OA}}{r} = \frac{\overline{OA}}{1};$$

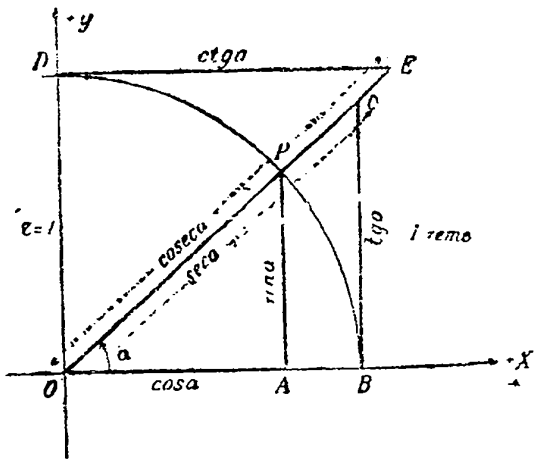


Рис. 66.

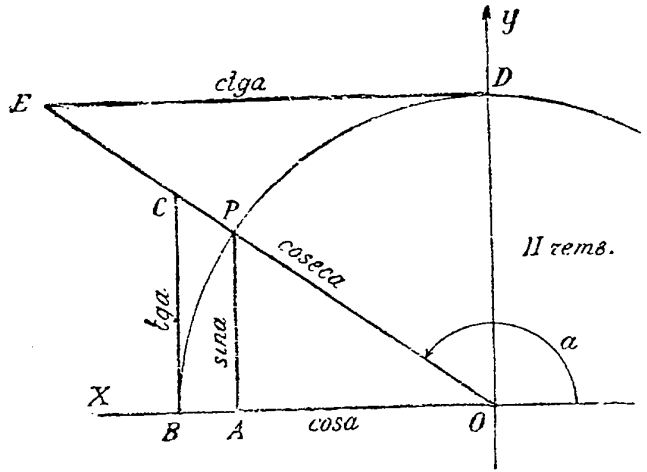


Рис. 67.

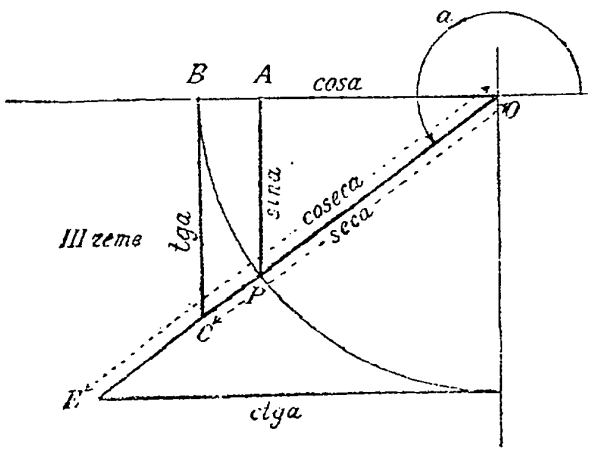


Рис. 68.

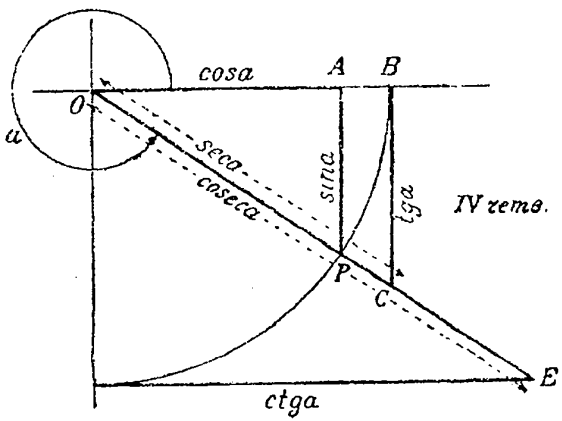


Рис. 69.

$$\operatorname{tg} a = \frac{\overline{CB}}{r} = \frac{\overline{CB}}{1}; \qquad \operatorname{ctg} a = \frac{\overline{DE}}{r} = \frac{\overline{DE}}{1};$$

$$\sec a = \frac{\overline{OC}}{r} = \frac{\overline{OC}}{1}; \qquad \operatorname{cosec} a = \frac{\overline{OE}}{r} = \frac{\overline{OE}}{1}.$$

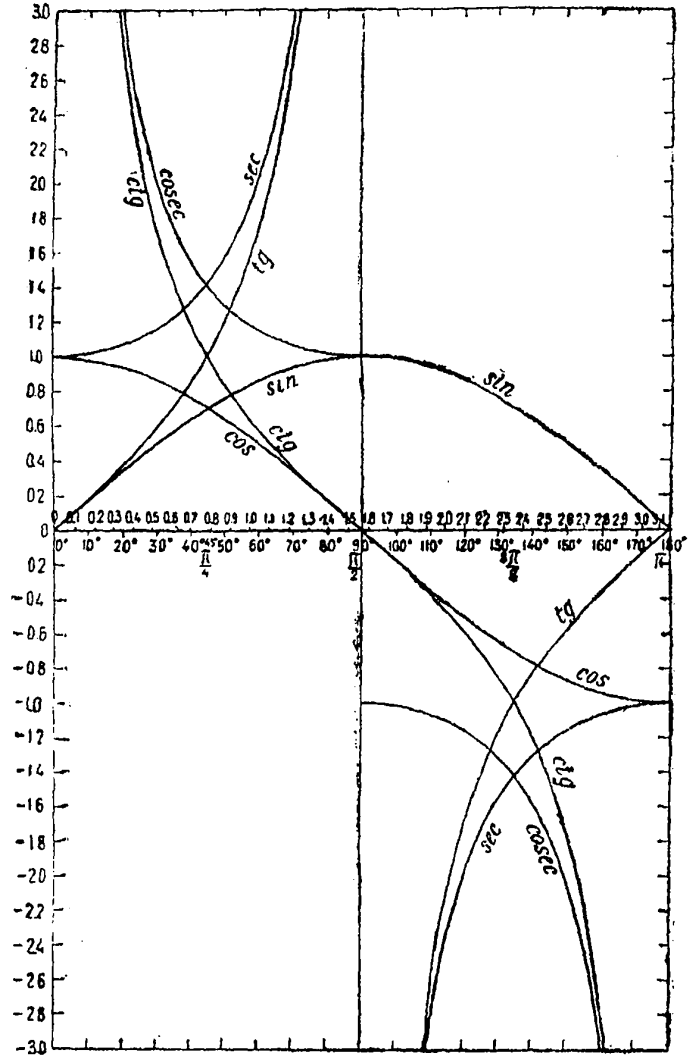


Рис. 70.

Графическое изображение тригонометрических функций во всех остальных четвертях (квадрантах) представлено на рис. 67, 68, 69.

Графики всех шести тригонометрических функций представлены на рис. 70, причем масштаб по оси X-ов взят другой, чем по оси Y, для удобства и простоты построения графиков. Аргументы показаны как в градусной мере (нижняя строка) через 10°, так и в радианах через 0,1 (верхняя строка).

На рис. 71 показаны графики sin-a, cos-a и tg-a, причем масштаб по обеим осям принят одинаковый. Углы выражены в градусах и радианах.

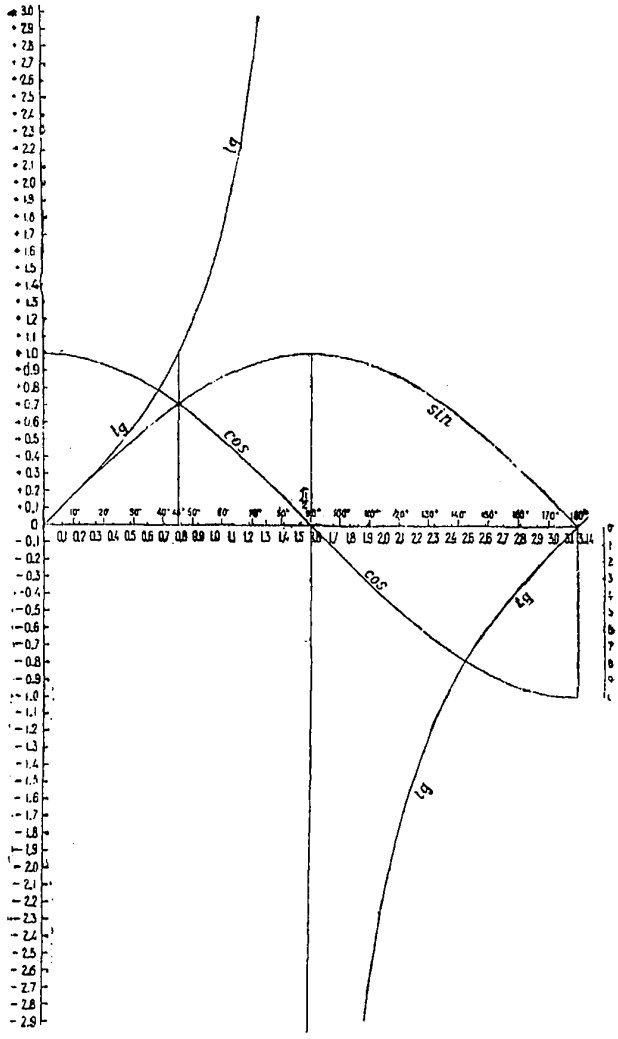


Рис. 71.

Периодичность тригонометрических фуикций

$$\sin a = \sin(2\pi k + a); \qquad \operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec}(2\pi k + a);$$
$$\cos a = \cos(2\pi k + a); \qquad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(\pi k + a);$$
$$\sec a = \sec(2\pi k + a); \qquad \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg}(\pi k + a),$$

где k — произвольное целое число.

Формулы приведения функций к углу первой четверти

Углы \ Функции	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
$x = a$	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$x = 90° - a$	$+\cos a$	$+\sin a$	$+\operatorname{ctg} a$	$+\operatorname{tg} a$	$+\operatorname{cosec} a$	$+\sec a$
$x = 90° + a$	$+\cos a$	$-\sin a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{cosec} a$	$+\sec a$
$x = 180° - a$	$+\sin a$	$-\cos a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\sec a$	$+\operatorname{cosec} a$
$x = 180° + a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$+\operatorname{tg} a$	$+\operatorname{ctg} a$	$-\sec a$	$-\operatorname{cosec} a$
$x = 270° - a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$+\operatorname{ctg} a$	$+\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{cosec} a$	$-\sec a$
$x = 270° + a$	$-\cos a$	$+\sin a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$+\operatorname{cosec} a$	$-\sec a$
$x = 360° - a$, $x = -a$	$-\sin a$	$+\cos a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$+\sec a$	$-\operatorname{cosec} a$

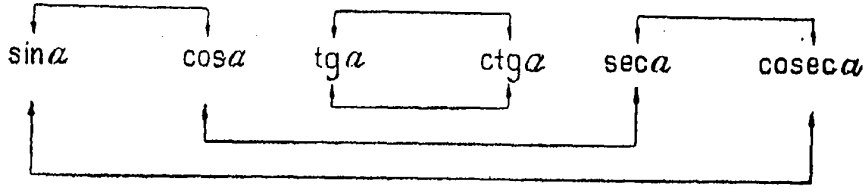
Значения тригонометрических функций некоторых углов

Углы \ Функции	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
15°	$\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}})$	$\frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$2\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$2\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

§ 3. Связь между функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \sin a \cdot \operatorname{cosec} a = 1 \qquad \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$
$$\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a = 1 \qquad \cos a \cdot \sec a = 1 \qquad \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{ctg} a$$
$$\operatorname{cosec}^2 a - \operatorname{ctg}^2 a = 1 \qquad \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$$

Дополнительные функции



Взаимнообратные тригонометрические функции.

Выражение каждой тригонометрической функции через все остальные

Искомая функция \ Данная функция	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
sin	$\sin a$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} a}$
cos	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\cos a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg} a}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\frac{1}{\sec a}$	$\pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
tg	$\pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\operatorname{tg} a$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
ctg	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} a}$	$\operatorname{ctg} a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
sec	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}{\operatorname{ctg} a}$	$\sec a$	$\pm\frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
cosec	$\frac{1}{\sin a}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}$	$\pm\frac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\operatorname{cosec} a$

§ 4. Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ \sin(a-b)&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b)&=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\\ \operatorname{tg}(a-b)&=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}(a+b)&=\frac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b-1}{\operatorname{ctg}a+\operatorname{ctg}b}\\ \operatorname{ctg}(a-b)&=-\frac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b+1}{\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)\cos(a-b)+\cos(a+b)\sin(a-b)&=\sin 2a\\ \sin(a+b)\cos(a-b)-\cos(a+b)\sin(a-b)&=\sin 2b\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)+\sin(a-b)&=2\sin a\cos b\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)&=2\cos a\sin b\\ \cos(a+b)+\cos(a-b)&=2\cos a\cos b\\ \cos(a+b)-\cos(a-b)&=-2\sin a\sin b\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

§ 5. Формулы сумм и разностей тригонометрических функций

$$\left.\begin{aligned}\sin a+\sin b&=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\\ \sin a-\sin b&=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\\ \cos a+\cos b&=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\\ \cos a-\cos b&=-2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}\\ \frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)\\ \frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b}&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b&=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b}\\ \operatorname{ctg}a\pm\operatorname{ctg}b&=\pm\frac{\sin(a\pm b)}{\sin a\sin b}\\ \operatorname{ctg}a\pm\operatorname{tg}b&=\frac{\cos(a\mp b)}{\sin a\cos b}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a+\cos b&=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\\ \sin a-\cos b&=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a+\cos a&=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\\ \sin a-\cos a&=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

§ 6. Тригонометрические функции двойных, тройных и кратных углов

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a\\ \cos 2a&=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Выражение всех функций двойного угла через $\operatorname{tg} a$:

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a&=\frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a}=\frac{2}{\operatorname{ctg} a+\operatorname{tg} a}\\ \cos 2a&=\frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}\\ \operatorname{tg} 2a&=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\frac{2}{\operatorname{ctg} a-\operatorname{tg} a}\\ \operatorname{ctg} 2a&=\frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg} a}=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} a-\operatorname{tg} a)=\frac{\operatorname{ctg}^2 a-1}{2\operatorname{ctg} a}\\ \sec 2a&=\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{1-\operatorname{tg}^2 a}\\ \operatorname{cosec} 2a&=\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg} a}=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} a+\operatorname{tg} a)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3a&=3\sin a-4\sin^3 a\\ \cos 3a&=4\cos^3 a-3\cos a\\ \operatorname{tg} 3a&=\frac{3\operatorname{tg} a-\operatorname{tg}^3 a}{1-3\operatorname{tg}^2 a};\quad \operatorname{ctg} 3a=\frac{3\operatorname{ctg} a-\operatorname{ctg}^3 a}{1-3\operatorname{ctg}^2 a}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 4a&=4\sin a\cos^3 a-4\sin^3 a\cos a\\ \cos 4a&=\cos^4 a-6\cos^2 a\sin^2 a+\sin^4 a\\ \operatorname{tg} 4a&=\frac{4\operatorname{tg} a-4\operatorname{tg}^3 a}{1-6\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^4 a}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\sin na=n\sin a\cos^{n-1}a-\binom{n}{3}\sin^3 a\cos^{n-3}a+\binom{n}{5}\sin^5 a\cos^{n-5}a-\ldots\qquad(5)$$

$$\cos na=\cos^n a-\binom{n}{2}\sin^2 a\cos^{n-2}a+\binom{n}{4}\sin^4 a\cos^{n-4}a-\ldots\qquad(6)$$

Символы $\binom{n}{k}$ обозначают биномиальные коэфициенты (см. гл. I, § 20)

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)k}$$

По этим формулам будет:

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a\\ \sin 3a&=3\sin a\cos^2 a-\sin^3 a\\ \sin 4a&=4\sin a\cos^3 a-4\sin^3 a\cos a\\ \sin 5a&=5\sin a\cos^4 a-10\sin^3 a\cos^2 a+\sin^5 a\\ \sin 6a&=6\sin a\cos^5 a-20\sin^3 a\cos^3 a+6\sin^5 a\cos a\\ \sin 7a&=7\sin a\cos^6 a-35\sin^3 a\cos^4 a+21\sin^5 a\cos^2 a-\sin^7 a\\ \sin 8a&=8\sin a\cos^7 a-56\sin^3 a\cos^5 a+\\ &\quad+56\sin^5 a\cos^3 a-8\sin^7 a\cos a\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a\\
&\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a\\
&\cos 4a = \cos^4 a - 6\cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a\\
&\cos 5a = \cos^5 a - 10\cos^3 a \sin^2 a + 5\cos a \sin^4 a\\
&\cos 6a = \cos^6 a - 15\cos^4 a \sin^2 a + 15\cos^2 a \sin^4 a - \sin^6 a\\
&\cos 7a = \cos^7 a - 21\cos^5 a \sin^2 a + 35\cos^3 a \sin^4 a - 7\cos a \sin^6 a\\
&\cos 8a = \cos^8 a - 28\cos^6 a \sin^2 a +\\
&\qquad + 70\cos^4 a \sin^4 a - 28\cos^2 a \sin^6 a + \sin^8 a
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$

§ 7. Тригонометрические функции половинных углов

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}; \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}} = \frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1-\cos a} \qquad (3)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2} &= \pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}\right]\\
\cos\frac{a}{2} &= \pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin^2\frac{a}{2} &= \frac{1-\cos a}{2}; \quad \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}\\
\sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}; \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
1-\cos 2a &= 2\sin^2 a; \quad 1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}\\
1+\cos 2a &= 2\cos^2 a; \quad 1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin a &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\\
\cos a &= 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

$$1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} = \text{versed sine } a$$

$$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} = \text{sur versed sine } a$$

$$\frac{1-\cos a}{2} = \sin^2\frac{a}{2} = \text{half versine } a \text{ (haversine } a\text{) (сокр. обозн. „Hav } a\text{“).}$$

§ 8. Некоторые полезные формулы

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a\\
&\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a\\
&\sin(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}[\sin 2a + \sin 2b]\\
&\sin(a-b)\cos(a+b) = \frac{1}{2}[\sin 2a - \sin 2b]
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}&=\sec a+\operatorname{tg} a=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=\frac{\cos a}{1-\sin a}\\ \frac{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}&=\sec a-\operatorname{tg} a=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{\cos a}{1+\sin a}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+\sin a}{1-\sin a}&=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\\ \frac{1-\sin a}{1+\sin a}&=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a}&=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\\ \frac{\operatorname{tg} a+1}{\operatorname{tg} a-1}&=\operatorname{ctg}\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b)&=\frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 b}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 b}\\ \operatorname{ctg}(a+b)\operatorname{ctg}(a-b)&=\frac{1-\operatorname{ctg}^2 a\operatorname{ctg}^2 b}{\operatorname{ctg}^2 a-\operatorname{ctg}^2 b}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\frac{\sin a+\cos a}{\sin a-\cos a}=\frac{1+\operatorname{ctg} a}{1-\operatorname{ctg} a}=-\frac{1+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a}=\operatorname{ctg}\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b};\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b}\\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{\sin a-\sin b}{\cos b-\cos a};\qquad \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin a+\sin b}{\cos b-\cos a}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin a-\sin b}{\cos a-\cos b}&=-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b)\\ \frac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b}&=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

§ 9. Суммы sin-ов и cos-ов углов, возрастающих в арифметической прогрессии

$$\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\ldots+\sin(a+(n-1)h)=$$
$$=\frac{\sin n\frac{h}{2}\sin\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos(a+(n-1)h)=$$
$$=\frac{\sin n\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

§ 10. Вторые, третьи и n-ые степени тригонометрических функций при n нечетном

$$\sin^n a=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left[\sin na-\binom{n}{1}\sin(n-2)a+\right.$$
$$+\binom{n}{2}\sin(n-4)a-\binom{n}{3}\sin(n-6)a+\ldots+$$
$$\left.+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\tbinom{n}{\frac{n-3}{2}}\right)\sin 3a+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\tbinom{n}{\frac{n-1}{2}}\right)\sin a\right]\quad(1)$$

при n четном

$$\sin^n a = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\left[\cos na - \binom{n}{1}\cos(n-2)a + \binom{n}{2}\cos(n-4)a - \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-4}\right)\cos 4a + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-2}\right)\cos 2a\right] + \binom{n}{\frac{1}{2}n}\frac{1}{2^n} \quad (2)$$

при n нечетном

$$\cos^n a = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos na + \binom{n}{1}\cos(n-2)a + \binom{n}{2}\cos(n-4)a + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{3}\cos(n-6)a + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-3}\right)\cos 3a + \left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-1}\right)\cos a\right] \quad (3)$$

при n четном

$$\cos^n a = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos na + \binom{n}{1}\cos(n-2)a + \binom{n}{2}\cos(n-4)a + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-4}\right)\cos 4a + \left(\tfrac{1}{2}\binom{n}{n-2}\right)\cos 2a\right] + \binom{n}{\frac{1}{2}n}\frac{1}{2^n} \quad (4)$$

Символы $\binom{n}{k}$, как и выше, означают биномиальные коэфициенты. По этим формулам получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 a &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a \\
\sin^3 a &= \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin 3a \\
\sin^4 a &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a \\
\sin^5 a &= \frac{5}{8}\sin a - \frac{5}{16}\sin 3a + \frac{1}{16}\sin 5a \\
\sin^6 a &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2a + \frac{3}{16}\cos 4a - \frac{1}{32}\cos 6a \\
\sin^7 a &= \frac{35}{64}\sin a - \frac{21}{64}\sin 3a + \frac{7}{64}\sin 5a - \frac{1}{64}\sin 7a \\
\sin^8 a &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2a + \frac{7}{32}\cos 4a - \frac{1}{16}\cos 6a + \frac{1}{128}\cos 8a
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a \\
\cos^3 a &= \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a \\
\cos^4 a &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a \\
\cos^5 a &= \frac{5}{8}\cos a + \frac{5}{16}\cos 3a + \frac{1}{16}\cos 5a \\
\cos^6 a &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2a + \frac{3}{16}\cos 4a + \frac{1}{32}\cos 6a \\
\cos^7 a &= \frac{35}{64}\cos a + \frac{21}{64}\cos 3a + \frac{7}{64}\cos 5a + \frac{1}{64}\cos 7a \\
\cos^8 a &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2a + \frac{7}{32}\cos 4a + \frac{1}{16}\cos 6a + \frac{1}{128}\cos 8a
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 11. Тригонометрические функции малых углов

Малый угол, выраженный в радианах, можно принимать равным sin-у этого угла или tg-у, т. е. приближенно считать, что

$$x \approx \sin x \approx \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Справедливость этих формул зависит от величины угла, с одной стороны, и от допускаемой погрешности вичислений, с другой. Нижеприводимые таблички показывают, при какой величине угла x и при какой допустимой погрешности Δx указанные приближенные формулы будут справедливы.

(1)

Δx	$x \approx \sin x$	$x \approx \operatorname{tg} x$
	Пределы углов	
1′	6°,9	5°,5
1″	1,8	1,4
0″,1	0,8	0,65

(2)

Δx	$x \approx \sin x$	$x \approx \operatorname{tg} x$
	Пределы углов	
1^m	68^m	54^m
1^s	$17^m,4$	$13^m,8$
$0^s,1$	$8^m,1$	$6^m,4$

Первая таблица дает пределы углов, выраженных в градусных мерах, а вторая — во временных.

§ 12. Обратные тригонометрические функции (круговые функции)

1. Определение.

Если $y = \sin x$, то $x = \arcsin y$ при условии что $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$

„ $y = \cos x$ „ $x = \arccos y$ „ „ $0 \leqslant x \leqslant \pi$

„ $y = \operatorname{tg} x$ „ $x = \operatorname{arc\,tg} y$ „ „ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$

„ $y = \operatorname{ctg} x$ „ $x = \operatorname{arc\,ctg} y$ „ „ $0 < x < \pi$

„ $y = \sec x$ „ $x = \operatorname{arc\,sec} y$

„ $y = \operatorname{cosec} x$ „ $x = \operatorname{arc\,cosec} y$

Так же как sin или tg угла являются функциями угла, так и угол есть функция заданной тригонометрической величины. Эта обратная зависимость, выражается символически $x = \arcsin y$ и т. д. и читается так: „икс равно арксинусу игрека“ и обозначает, что x есть такой угол, sin которого равен заданной величине y; такое же определение будет и для других функций. Очевидно, что угол x выражен здесь в радианах. Arc sin y или другая обратная функция будут функции многозначные.

Так, например, выражение $\arcsin \frac{1}{2} = x$ справедливо для $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5}{6}\pi$ и, придавая к этим углам любое число раз величину 2π, будем иметь всякий раз, что найденному углу отвечает sin, равный $\frac{1}{2}$.

Чтобы устранить многозначность, наложим на круговые функции добавочное условие, чтобы arc sin, arc cosec, arc tg, arc ctg заключались в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, включая и эти пределы, а arc cos и arc sec в пределах от 0 до π. Значение круговых функций, удовлетворяющих этим условиям, называют главными значениями.

Тогда общие формулы для углов по заданным их тригонометрическим функциям будут:

Если $\sin x = a$, то $x = \pi 2n + \arcsin a$
или $x = \pi(2n+1) - \arcsin a$.
Если $\cos x = a$, то $x = 2\pi n \pm \arccos a$.
Если $\operatorname{tg} x = a$, то $x = \pi n + \operatorname{arctg} a$,

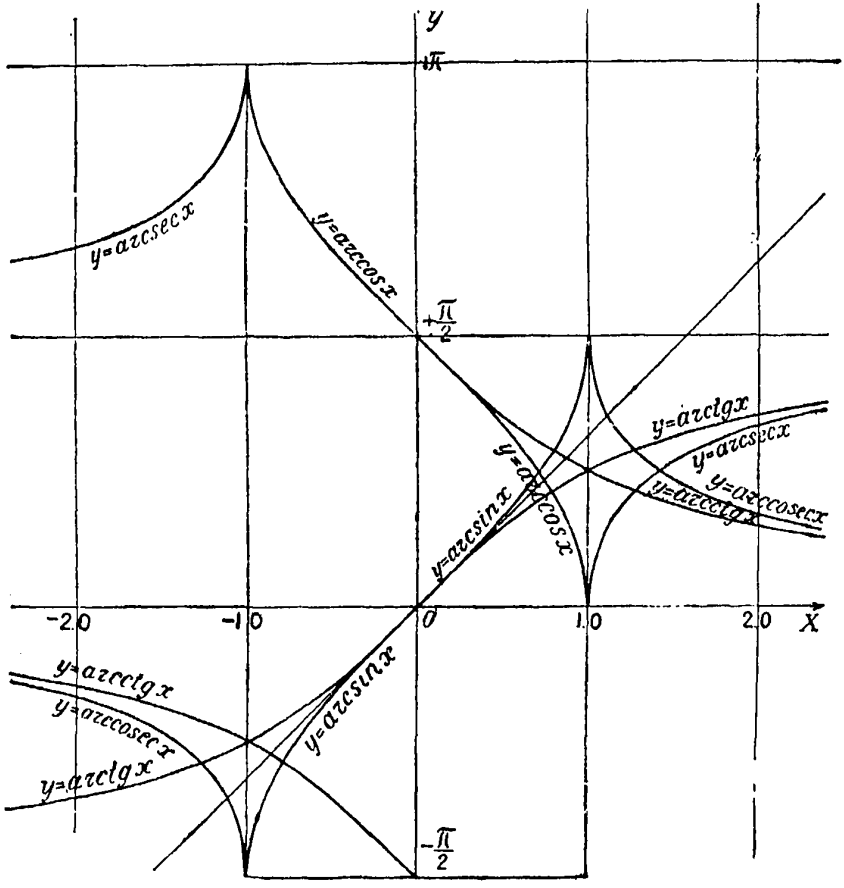


Рис. 72.

где $\arcsin a$, $\arccos a$... суть главные значения круговых функций. Очевидно, что для главных значений круговых функций, по определению, будем иметь всегда:

$$\sin(\arcsin a) = a,\ \cos(\arccos a) = a,\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a \text{ и т. д.}$$

и

$$\arcsin(\sin x) = x,\ \arccos(\cos x) = x,\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ и т. д.},$$

т. е. знаки тригонометрической функции и соответствующей ей обратной функции взаимно уничтожаются.

Графики обратных тригонометрических функций представлены на рис. 72.

На этом графике показаны главные значения круговых функций, согласно сделанному выше ограничению.

Как известно, если задана функция $y=f(x)$ графически, то для получения графика обратной функции $x=\varphi(y)$ достаточно повернуть плоскость графика на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла. Поэтому, если повернуть вокруг указанной линии график прямых тригонометрических функций (рис. 71), то получим график обратных функций, приведенный на рис. 72.

Следует обратить внимание на то, что в английских руководствах обратные тригонометрические функции обозначают так:

$$\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x,\ \operatorname{tg}^{-1}x \text{ и т. д.}$$

2. Зависимость между обратными тригонометрическими функциями.

$$x=\pm\arcsin y=\arccos\sqrt{1-y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\pi}{2}-\arccos y=$$
$$=\frac{1}{2}\arccos(1-2y^2)$$

$$x=\arccos y=\arcsin\sqrt{1-y^2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{\pi}{2}-\arcsin y=$$
$$=\frac{1}{2}\arccos(2y^2-1);$$

$$x=\operatorname{arctg} y=\arcsin\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{y}=$$
$$=\operatorname{arcsec}\sqrt{1+y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-y^2}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2y}{1+y^2}=\frac{1}{2}\arccos\frac{1-y^2}{1+y^2}$$

3. Формулы сложения обратных тригонометрических функций.

$$\arcsin y\pm\arcsin z=\arcsin\left[y\sqrt{1-z^2}\pm z\sqrt{1-y^2}\right]=$$
$$=\arccos\left[\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-z^2}\mp yz\right];$$

$$\arccos y\pm\arccos z=\arcsin\left[z\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-z^2}\right]=$$
$$=\arccos\left[yz\mp\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\right];$$

$$\operatorname{arctg} y\pm\operatorname{arctg} z=\operatorname{arctg}\frac{y\pm z}{1\mp yz}.$$

4. $\arcsin(-y)=-\arcsin y$; $\quad\arccos(-y)=\pi-\arccos y$;
$\operatorname{arctg}(-y)=-\operatorname{arctg} y$; $\quad\operatorname{arctg}(-y)=\pi-\operatorname{arctg} y$.

5. Соотношение между обратными тригонометрическими функциями см. на стр. 108.

§ 13. Решение некоторых тригонометрических уравнений

1. Уравнение вида

$$A\sin x+B\cos x=N, \qquad (1)$$

где A, B и N — заданные числа, имеет следующие решения:

$$x_1=\lambda-\theta+k2\pi;\quad x_2=(2k+1)\pi-\lambda-\theta;$$

k — любое целое положительное или отрицательное число; при $k=0$ получаем простейшее решение.

Таблица соотношений между обратными тригонометрическими функциями того же аргумента

Данная функция \ Через указанную функцию	$x = \arcsin y$	$\arccos y$	$\operatorname{arctg} y$	$\operatorname{arcctg} y$	$\operatorname{arcsec} y$	$\operatorname{arccosec} y$
$x = \arcsin y =$	$\arcsin y$	$\arccos \sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2} - \arccos y$	$\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$	$\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$	$\operatorname{arcsec} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\operatorname{arccosec} \frac{1}{y}$
$x = \arccos y =$	$\arcsin \sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$	$\arccos y$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$	$\operatorname{arcctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$	$\operatorname{arcsec} \frac{1}{y}$	$\operatorname{arccosec} \frac{1}{\sqrt{1-}}$
$x = \operatorname{arctg} y =$	$\arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y}}$	$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$	$\operatorname{arctg} y$	$\operatorname{arcctg} \frac{1}{y}$	$\operatorname{arcsec} \sqrt{1+y^2}$	$\operatorname{arccosec} \frac{\sqrt{1-}}{y}$
$x = \operatorname{arcctg} y =$	$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$	$\arccos \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{y}$	$\operatorname{arcctg} y$	$\operatorname{arcsec} \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$	$\operatorname{arccosec} \sqrt{1-}$
$x = \operatorname{arcsec} y =$	$\arcsin \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$	$\arccos \frac{1}{y}$	$\operatorname{arctg} \sqrt{y^2-1}$	$\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$	$\operatorname{arcsec} y$	$\operatorname{arccosec} \frac{}{\sqrt{y^2}}$
$x = \operatorname{arccosec} y =$	$\arcsin \frac{1}{y}$	$\arccos \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$	$\operatorname{arcctg} \sqrt{y^2-1}$	$\operatorname{arcsec} \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$	$\operatorname{arccosec} y$

Вспомогательный угол θ определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{B}{A}\quad|\theta|<90^\circ, \tag{2}$$

а угол λ получается как наименьший корень уравнения

$$\sin\lambda=\frac{N}{A}\cos\theta=\frac{N}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3}$$

Задача допускает решение, если

$$A^2+B^2-N^2>0.$$

Кроме того, решение уравнения (1) можно представить еще и в таком виде:

$$\sin x=\frac{AN\pm B\sqrt{A^2+B^2-N^2}}{B^2+A^2} \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{AB\pm N\sqrt{A^2+B^2-N^2}}{A^2-N^2} \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2+B^2-N^2}}{B+N} \tag{6}$$

Некоторые из этих решений могут оказаться посторонними данному уравнению.

2. Уравнения, приводимые в таблице на стр. 110, имеют сходные между собой решения.

3. Уравнение $\sin(\alpha+z)=m\sin(\beta+z)$ имеет решение:

$$\operatorname{tg}z=-\frac{\sin\alpha-m\sin\beta}{\cos\alpha-m\cos\beta}.$$

Более удобна для вычислений форма:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\operatorname{ctg}(\varphi-45)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

где $\operatorname{tg}\varphi=m$.

4. Определить x и y из двух уравнений:

$$x\sin y=m$$
$$x\cos y=n,$$

где m и n — заданные величины.

$$\operatorname{tg}y=\frac{m}{n}$$
$$x=\frac{m}{\sin y}=\frac{n}{\cos y}=\pm\sqrt{m^2+n^2}.$$

Чтобы задача была определенной, необходимо одно из следующих дополнительных условий:

а) Если $y<360^\circ$, то необходимо задать знак величины x. При этом условии четверть, в которой лежит угол y, определяется знаками величин m и n.

б) Знак величины не задан, но угол y ограничен условием

$$y<180^\circ\quad\text{или}\quad y>180^\circ.$$

Таблица решений некоторых тригонометрических уравнений

Уравнения			
$\sin(\alpha \pm z) = m \sin z$	$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin\alpha}{m \mp \cos\alpha}$	$\operatorname{ctg} z = \dfrac{m}{\sin\alpha} \mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(z \pm \dfrac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}(\varphi \mp 45°)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$
$\cos(\alpha \pm z) = m \cos z$	$\operatorname{ctg} z = \dfrac{\pm\sin\alpha}{\cos\alpha - m}$	$\operatorname{tg} z = \pm\left(\operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{m}{\sin\alpha}\right)$	$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} \pm z\right) = \operatorname{tg}(45° - \varphi)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$
$\sin(\alpha \pm z) = m \cos z$	$\operatorname{ctg} z = \dfrac{\pm\cos\alpha}{m - \sin\alpha}$	$\operatorname{tg} z = \pm\left(\dfrac{m}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)$	$\operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2} \mp z\right) = \operatorname{tg}(45° - \varphi)\operatorname{tg}\left(45° + \dfrac{\alpha}{2}\right)$
$\cos(\alpha \pm z) = m \sin z$	$\operatorname{tg} z = \dfrac{\cos\alpha}{m \pm \sin\alpha}$	$\operatorname{ctg} z = \dfrac{m}{\cos\alpha} \pm \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2} \mp z\right) = \operatorname{tg}(45° \mp \varphi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 45°\right)$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm z) = m \operatorname{tg} z$		$\operatorname{tg} z = \pm\left(\dfrac{m \mp 1}{2m}\operatorname{ctg}\alpha\right) \pm \sqrt{\left(\dfrac{m \mp 1}{2m}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 \mp \dfrac{1}{m}}$	$\sin(2z \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(\varphi \mp 45°)\sin\alpha$
$\sin(\alpha \pm z)\sin z = m$	при знаке +	$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + z\right) = \pm\sqrt{\sin\left(\varphi + \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, где $\cos^2\varphi = m$	$\cos(\alpha \pm 2z) = \cos\alpha \mp 2m$
$\cos(\alpha \pm z)\cos z = m$	при знаке +	$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + z\right) = \pm\sqrt{\sin\left(\varphi + \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, где $\cos^2\varphi = m$	$\cos(\alpha \pm 2z) = 2m - \cos\alpha$
$\sin(\alpha \pm z)\cos z = m$			$\sin(\alpha \pm 2z) = 2m - \sin\alpha$
$\cos(\alpha \pm z)\sin z = m$			$\sin(\alpha \pm 2z) = \sin\alpha \pm 2m$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm z)\operatorname{tg} z = m$		$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} \pm z\right) = \pm\sqrt{\dfrac{m \pm \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{m\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \pm 1}}$	$\cos(\alpha \pm 2z) = \operatorname{tg}(45° \mp \varphi)\cos\alpha$, где $\operatorname{tg}\varphi = m$

В обоих случаях угол y по tg-y получает одно значение и, если

$y<180°$, то знак x одинаков со знаком величины m,
$y>180°$, „ „ x обратный знаку величины m.

в) Знак величины x не задан, но угол y ограничен условием

$$|y|<90°,$$

т. е. угол y острый, положительный или отрицательный.

В обоих случаях знак угла y определяется знаком величины n.

5. Найти x и z из двух уравнений:

$$x\sin(\alpha+z)=m$$

$$x\sin(\beta+z)=n$$

α, β, m и n — заданные величины. Эти уравнения равносильны следующим:

$$x\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\frac{\frac{1}{2}(m+n)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$x\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\frac{\frac{1}{2}(m-n)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

При условии, что $x>0$, четверть угла $\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]$ определится без двойственности по знакам sin-a и cos-a. Для нахождения угла $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z$ удобна формула

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\operatorname{tg}(45°+\varphi)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{m}.$$

6. Решение уравнений

$$x\cos(\alpha+z)=m$$

$$x\cos(\beta+z)=n$$

$$x\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\frac{\frac{1}{2}(n-m)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$x\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\frac{\frac{1}{2}(n+m)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+z\right]=\operatorname{tg}(45°+\varphi)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m}{n}.$$

§ 14. Общие формулы

А. Прямоугольные треугольники (рис. 73)

S — площадь;
a и b — катеты;
c — гипотенуза.
h — перпендикуляр на гипотенузу;
m и n — отрезки, прилежащие к катетам.

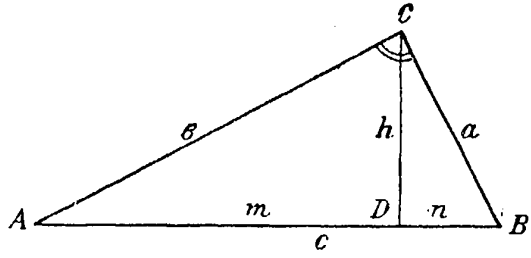


Рис. 73.

Данные — Решение

1. c и A $\quad a=c\sin A;\ b=c\cos A;\ B=90^\circ-A;\ S=\frac{1}{2}c^2\sin 2A.$

2. c и b $\quad \cos A=\frac{b}{c};\ a=c\sin A=\sqrt{(c+b)(c-b)};$

$$B=90^\circ-A;\ S=\frac{cb\sin A}{2}=\frac{1}{2}b\sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

3. A и b $\quad a=b\operatorname{tg}A;\ c=\frac{b}{\cos A};\ B=90^\circ-A;\ S=\frac{b^2\operatorname{tg}A}{2}.$

4. A и a $\quad c=\frac{a}{\sin A};\ b=\frac{a}{\operatorname{tg}A};\ B=90^\circ-A;\ S=\frac{a^2}{2\operatorname{tg}A}.$

5. a и b $\quad \operatorname{tg}A=\frac{a}{b};\ c=\frac{a}{\sin A}=\sqrt{a^2+b^2};\ S=\frac{1}{2}ab.$

Особые случаи

$$\frac{h}{a}=\frac{b}{c}\qquad h=\frac{ab}{c}\qquad h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h}\qquad h=\sqrt{mn}$$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{m}{b}=\frac{b}{c}\qquad b=\sqrt{mc}\qquad \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{n}{a}=\frac{a}{c}\qquad a=\sqrt{nc}\qquad \frac{c}{h^2}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right).$$

Диференциальные формулы:

$\Delta a, \Delta b, \Delta c$ — элементарно малые изменения сторон прямоугольного треугольника;

ΔA — элементарно малое изменение острого угла, выраженное в радианах.

$$a\Delta a+b\Delta b=c\Delta c;\ \frac{\Delta a}{a}=\frac{\Delta c}{c}+\operatorname{ctg}A\cdot\Delta A;\ \frac{\Delta a}{a}=\frac{\Delta b}{b}+\frac{2\Delta A}{\sin 2A}.$$

Б. Косоугольные треугольники (рис. 74)

Общие формулы:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;\ R\text{ — радиус описанного круга.}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)};\qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad a=b\cos C+c\cos B$$

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\\ \cos^2\frac{A}{2}&=\frac{p(p-a)}{bc}\\ \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}&=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\end{aligned}\right\}\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\\ \frac{a-b}{c}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\end{aligned}\right\}\ \text{формулы Мольвейде}$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C$$

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C$$

$$a^2=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$$

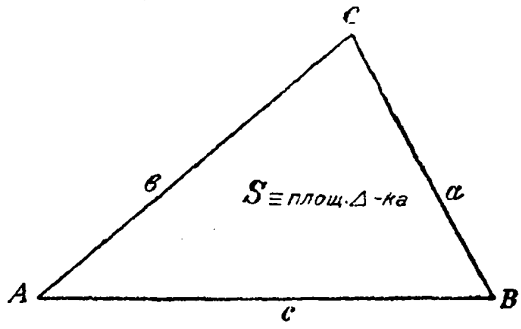


Рис. 74.

Свойства тригонометрических функций углов треугольника

$$(A+B+C=\pi)$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$$

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\cos A\cos B\cos C+2$$

$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C$$

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A=1$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

$$\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C.$$

§ 15. Различные случаи решения косоугольных треугольников

1-й случай Даны: A, B и a (рис. 75). Найти: C, b, c и S.

1-е решение

$$C = 180° - (A + B)$$

$$\left.\begin{aligned} b &= a\frac{\sin B}{\sin A} \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A} \\ S &= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B \sin (A+B)}{\sin A} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

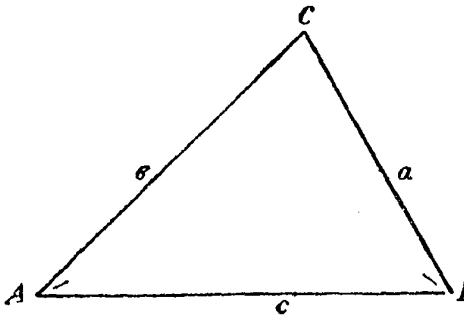


Рис. 75.

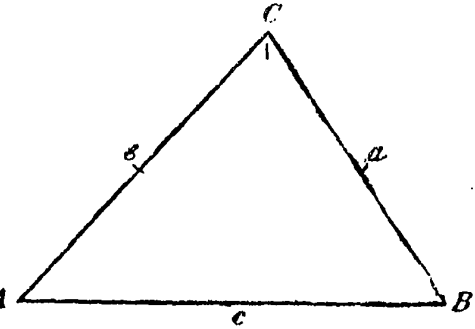


Рис. 76.

2-е решение

$$\left.\begin{aligned} b + c &= a\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} \\ b - c &= a\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} \end{aligned}\right\} \text{ формулы Мольвейде} \qquad (2)$$

2-й случай Даны: a, b и C (рис. 76). Найти: A, B, c и S.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\frac{1}{2}(a-b)}{\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90° - \frac{1}{2}C \qquad (3)$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{b\sin C}{\sin B}$$

или

$$c = (a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = (a-b)\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} \qquad (4)$$

Непосредственно через данные сторона c выражается формулами:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (5)$$

или в виде, удобном для логарифмических вычислений:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{2\cos\frac{1}{2}C}{(a+b)}\sqrt{ab} \qquad \operatorname{tg} y = \frac{2\sin\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab} \\ c &= (a+b)\cos x \qquad\qquad c = (a-b)\sec y \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\text{Площадь } S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Если надо найти сторону c и один угол A, то можно применить такие формулы:

$$\left.\begin{aligned} c\sin A &= a\sin C \\ c\cos A &= b - a\cos C \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

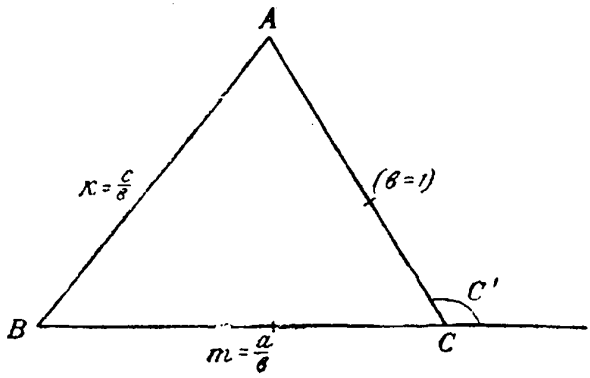


Рис. 77.

что равносильно таким двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2 - 2ab\cos C + b^2 \\ \operatorname{tg} A &= \frac{a\sin C}{b - a\cos C} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если длину стороны b принять за единицу или выразить c и a в частях b и обозначить

$$\frac{c}{b} = k, \quad \frac{a}{b} = m,$$

то получим (рис. 77):

$$\begin{aligned} k\sin A &= m\sin C \\ k\cos A &= 1 - m\cos C \end{aligned} \tag{9}$$

или

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= 1 - 2m\cos C + m^2 \\ \operatorname{tg} A &= \frac{m\sin C}{1 - m\cos C} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если в треугольнике ABC будет задан внешний угол $C' = 180^\circ - C$, то вместо (10) получим:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= 1 + 2m\cos C' + m^2 \\ \operatorname{tg} A &= \frac{m\sin C'}{1 + m\cos C'} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Объединяя формулы (10) и (11), можем написать:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= 1 \mp 2m\cos C + m^2 \\ \operatorname{tg} A &= \frac{m\sin C}{1 \mp m\cos C} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Верхние знаки берутся, когда C внутренний угол, нижние — когда угол C внешний.

При вычислении (12) при помощи логарифмов надо различать два случая:

а) $m < 1$, введя вспомогательную величину

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= m\cos C, \\ \operatorname{tg} A &= \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg} C\operatorname{tg}\left(45^\circ \pm \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{2\cos\frac{C}{2}}{1+m}\sqrt{m} \\ k &= (1+m)\cos x \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

б) $m > 1$, полагая

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= m\cos C \\ \operatorname{tg} A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\theta\operatorname{ctg} C}{\sin(45^\circ \mp \theta)} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \frac{2\sin\frac{C}{2}\sqrt{m}}{m-1} \\ k &= (m-1)\sec y \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Когда величина m мала, то удобно разлагать A, $\lg k$ или k в ряды (отдел II, глава 2, § 14).

3-й случай

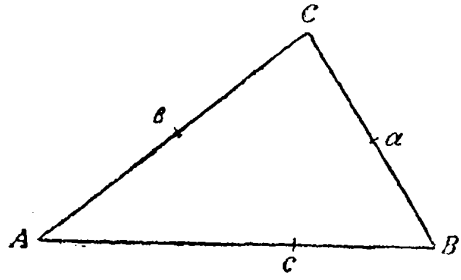


Рис. 78.

Даны: a, b и c (рис. 78).

Найти: A, B, C и S.

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

где

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

r — радиус круга, вписанного в данный треугольник.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r\cdot p.$$

4-й случай Даны: A, a и b (рис. 79). **Найти:** B, C, c и S.

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A$$

$$C = 180° - (A + B)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} cb \sin A$$

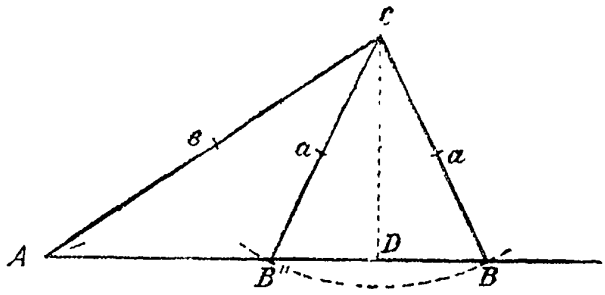


Рис. 79.

Так как угол B определяется по sin-у, то могут быть два решения: одно больше 90°, а другое меньше 90°. Поэтому случай IV требует дополнительного исследования.

1. Если $b \leqslant a$, то угол $B < 90°$; одно решение.
2. Если $b = a$, то „ $B = A$; одно решение.
3. Если $b > a$, то здесь возможны три случая.

1-й случай. $b \sin A > a$; задача невозможна.
2-й случай. $b \sin A = a$; одно решение—прямоугольный треугольник.
3-й случай. $b \sin A < a$; задача имеет два решения (рис. 79).

§ 16. Круг, описанный около треугольника

Около данного треугольника можно описать один круг, центр которого находится в пересечении перпендикуляров, проведенных через середины сторон (биссектров сторон) (рис. 80).

Радиус R описанного круга равен:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C};$$

$$R = \frac{abc}{4S};$$

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

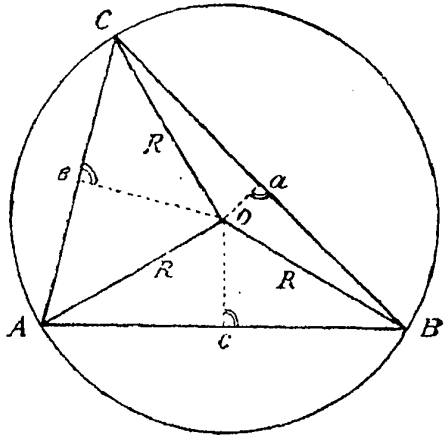


Рис. 80.

§ 17. Круг, вписанный в данный треугольник

В данный треугольник можно вписать только один круг. Центр O такого круга лежит в пересечении биссектрис внутренних углов треугольника (рис. 81).

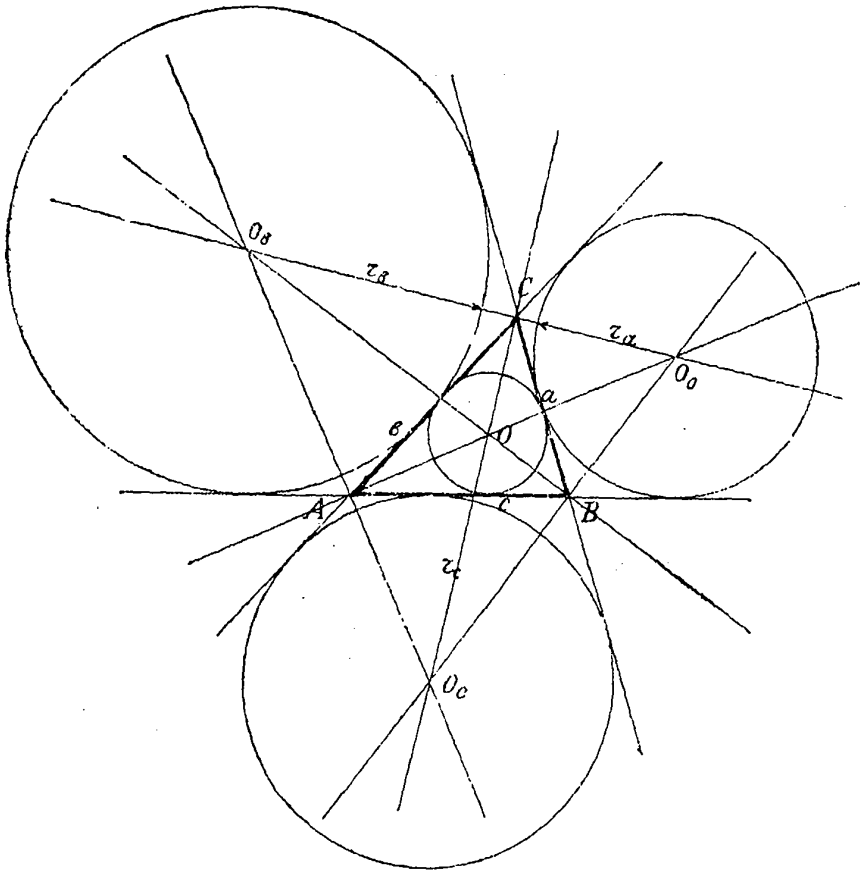


Рис. 81.

Радиус круга вписанного r

$$r = c\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = a\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = b\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}; \qquad (1)$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \qquad (2)$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}; \qquad (3)$$

$$r = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \qquad (4)$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{abc}{4Rp}. \qquad (5)$$

Внешневписанными называются такие окружности, которые касаются одной из сторон треугольника и продолжения двух других. Центры их O_a, O_b и O_c лежат вне треугольника в пересечении биссектрис двух внешних углов и одной бессектрисы внутреннего угла (рис. 81).

r_a — радиус внешневписанной окружности, касающийся стороны a
r_b — " " " " " b
r_c — " " " " " c
R — " описанного круга

$$r_a = \frac{S}{p-a} = a\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \tag{6}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} = b\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \tag{7}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = c\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \tag{8}$$

$$r.\ r_a.\ r_b.\ r_c = S^2 \tag{9}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \tag{10}$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \tag{11}$$

Глава 4

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Стр
§ 1.	Основные определения и теоремы сферической геометрии	123
§ 2.	Основные формулы сферической тригонометрии	124
§ 3.	Промежуточные формулы, связывающие пять элементов треугольника	128
§ 4.	Преобразование основных формул (приведение их к логарифмическому виду) и формулы для сферических радиусов вписанного и санного кругов и для сферического избытка	129
§ 5.	Формулы Деламбра-Гаусса	131
§ 6.	Прямоугольные и прямосторонние треугольники	132
§ 7.	Решение прямоугольных сферических треугольников	134
§ 8.	Решение косоугольных сферических треугольников	135
§ 9.	Элементарные сферические треугольники	141
§ 10.	Дифференциальные формулы	142

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Степанов. Сферическая тригонометрия.
2. Н. Н. Матусевич. Курс сферической тригонометрии (рукопись).

§ 1. Основные определения и теоремы сферической геометрии

Сферическим треугольником называется фигура ABC на сфере, составленная тремя дугами больших кругов, не пересекающимися в одной точке. В сферическом треугольнике рассматривают шесть элементов: три угла и три стороны.

Углы принято обозначать большими буквами A, B, C, а противолежащие им стороны малыми буквами a, b, c, как показано на рис. 82.

Обычно стороны и углы сферического треугольника ограничивают, по предложению Эйлера, пределами 180°. Иначе сказать, ограничиваются рассмотрением треугольников, которые помещаются на одной половине сферы.

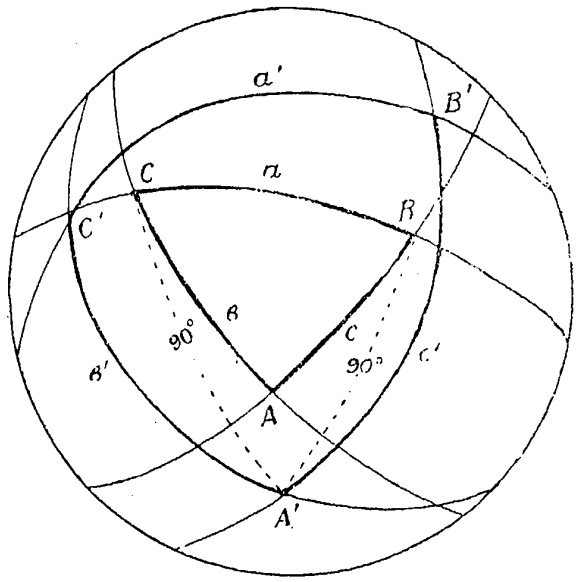


Рис. 82.

Треугольник $A'B'C'$, полярный данному, получается в пересечении трех дуг больших кругов, описанных из вершин данного треугольника как из полюсов (рис. 82), где $\smile AB' = \smile AC' = \smile BA' = \smile BC' = \smile CA' = \smile CB' = 90°$.

А. Свойства полярного треугольника

1. Вершины полярного треугольника A', B' и C' суть полюсы сторон данного треугольника a, b и c по определению.

2. Вершины данного треугольника A, B и C суть полюсы сторон полярного треугольника a', b' и c'. Значит и ΔABC полярен $\Delta A'B'C'$, т. е. полярность треугольников есть взаимное их свойство.

3. Угол данного треугольника и соответственная сторона полярного в сумме равны 180°, т. е. $A + a' = B + b' = C + c' = 180°$.

4. Угол полярного треугольника и соответственная сторона данного в сумме равны 180°, т. е. $A' + a = B' + b = C' + c = 180°$.

Б. Свойства сторон и углов сферического треугольника

1. Сумма двух сторон больше третьей стороны.
2. Разность двух сторон меньше третьей стороны.
3. Сумма сторон сферического треугольника больше 0° и меньше 360°, т. е. $0° < a + b + c < 360°$.
4. Сумма углов сферического треугольника больше 180° и меньше 540°, т. е.

$$180° < A + B + C < 540°.$$

Разность $A + B + C - 180° = \varepsilon$ называется сферическим избытком треугольника.

5. Сферический избыток больше 0° и меньше 360°, т. е.

$$0° < \varepsilon < 360°.$$

В. Равные и симметричные сферические треугольники

Равными или конгруентными сферическими треугольниками называют такие треугольники, которые при наложении совпадают всеми своими точками. Для равенства сферических треугольников необходимо и достаточно, чтобы было соблюдено одно из следующих условий:

1. Три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого и одинаково расположены.
2. Три угла одного треугольника равны трем углам другого и одинаково расположены.
3. Две стороны и угол между ними в одном треугольнике равны двум сторонам и углу другого треугольника и одинаково расположены.
4. Два угла и сторона между ними в одном треугольнике равны двум углам и стороне в другом треугольнике и одинаково расположены.

Если же, при указанных условиях равенства элементов, они расположены неодинаково, то треугольники будут только симметричны, так как их нельзя при этом совместить. Симметричные треугольники равновелики.

§ 2. Основные формулы сферической тригонометрии

Из шести элементов сферического треугольника только три можно задать произвольно, остальные три определятся этими элементами. Поэтому можно сказать, что каждый элемент сферического треугольника есть функция трех других и вследствие этого число всех основных формул сферической тригонометрии будет равно числу сочетаний из 6 элементов по 4, т. е.

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

Из этих 15 формул можно составить только 4 группы существенно различных между собой формул по следующему признаку:

I группа дает связь между тремя сторонами с одним углом, поэтому здесь может быть три случая.

Данные	Искомые	
a, b, c	$\dots A$	Всего три формулы.
a, b, c	$\dots B$	
a, b, c	$\dots C$	

II группа дает связь между тремя углами и одной стороной, поэтому здесь может быть три случая.

Данные	Искомые	
A, B, C	$\dots a$	Всего три формулы.
A, B, C	$\dots b$	
A, B, C	$\dots c$	

III группа связывает две стороны и противолежащие им углы; здесь тоже возможны три случая.

Данные	Искомые	
a, b, A	$\dots B$	Всего три формулы.
b, c, B	$\dots C$	
c, a, C	$\dots A$	

IV группа связывает четыре рядом лежащих элемента; в этом случае можно составить всего шесть формул: а) три для случая, если итти по контуру треугольника по часовой стрелке, и б) три для случая, если итти по контуру треугольника против часовой стрелки; поэтому:

Данные	Искомые	
а) B, c, A	$\dots b$	Всего шесть формул.
C, a, B	$\dots c$	
A, b, C	$\dots a$	
б) B, a, C	$\dots b$	
C, b, A	$\dots c$	
A, c, B	$\dots a$	

Легко видеть, что в каждой группе последующая комбинация получается из предыдущей круговой перестановкой букв, больших и малых.

Радиус сферы (рис. 83) примем равным 1. Из точки C опустим перпендикуляр CP на плоскость AOB, перпендикуляр CQ на ребро AO и CR на ребро OB. Соединим точку P с Q и R.

$$\angle CQP = A \quad \angle CRP = B.$$

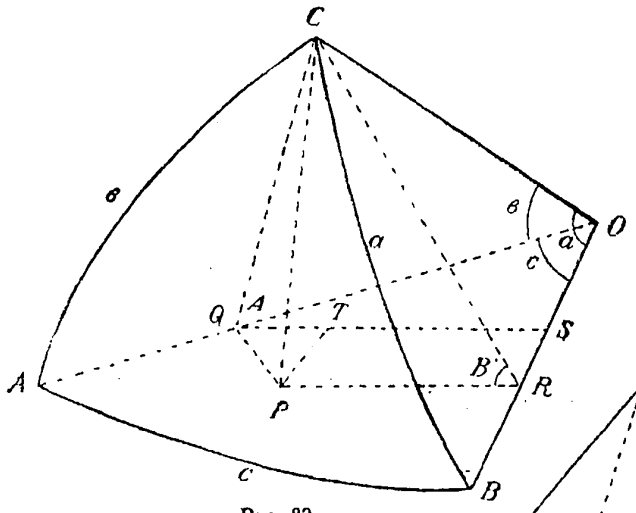


Рис. 83.

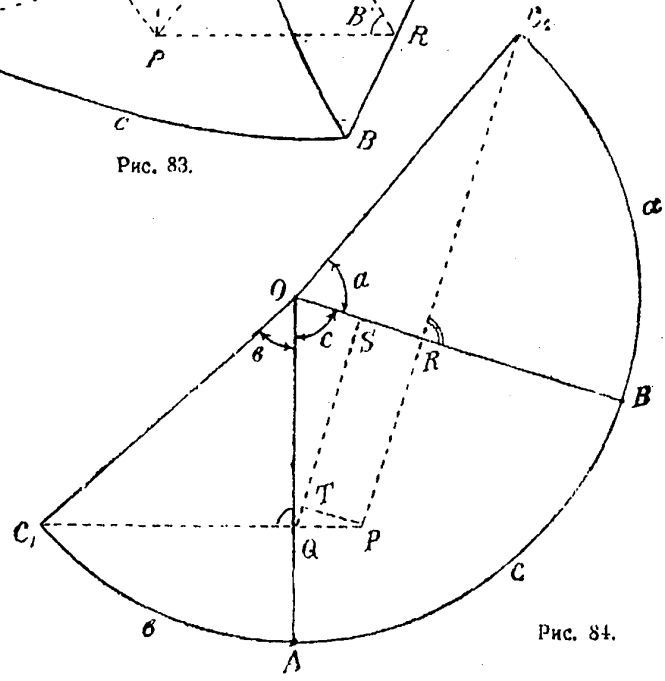


Рис. 84.

В плоскости грани AOB сделаем построение, указанное на рис. 84, который получим, развернув плоскости OAC и OBC до совпадения с плоскостью AOB. Тогда указанные ниже отрезки будут равны:

$$\left.\begin{array}{ll} OR = \cos a & OS = \cos b \cos c \\ RC = \sin a & QP = \sin b \cos A \\ OQ = \cos b & RP = \sin a \cos B \\ QC = \sin b & SQ = \cos b \sin c \end{array}\right\}$$

I группа основных формул (теорема косинусов)

Из рис. 84 имеем:

$$OR = OS + SR = OS + QP \sin c.$$

Заменяя значения отрезков согласно (*), получим:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \text{и круговой перестановкой букв найдем:} & \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Формулы этой группы следует читать так: cos *любой стороны равен произведению* cos-*ов двух других сторон плюс произведение* sin-*ов тех же сторон, умноженное на* cos *угла, лежащего против первой стороны.* Эти три выражения представляют собой три основные уравнения сферической тригонометрии, связывающие все шесть элементов треугольника. По виду этих выражений легко понять, что они независимы одно от другого, т. е. никакими алгебраическими операциями невозможно одно из них получить из других.

Формулы (1) справедливы для любых значений углов и сторон; они были впервые установлены арабским астрономом Магомет бен-Гебир-ал-Батани (850—929). Обычно его называют Альбатегний.

II группа основных формул (теорема косинусов для полярного треугольника)

Написав формулы (1) для треугольника полярного данному и переходя обратно к основному, получим:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Для запоминания эти формулы следует читать так: cos *любого угла равен отрицательному произведению* cos-*ов двух других углов плюс произведение* sin-*ов тех же углов, умноженное на* cos *стороны, лежащей против первого угла.* Эти формулы были впервые открыты французским математиком Vieta de la Bigotière (1540—1603).

III группа основных формул (теорема синусов)

По рис. 84 имеем $CP = CR \sin B = CQ \sin A$ и согласно (*) получим:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

Круговой перестановкой букв получим еще две другие формулы; таким образом, три формулы этой группы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin A \sin b \\ \sin b \sin C &= \sin B \sin c \\ \sin c \sin A &= \sin C \sin a \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Эти формулы читают так: sin *стороны, умноженный на* sin *прилежащего угла, равен произведению* sin-*а угла, противолежащего данной стороне, на* sin *стороны, противолежащей первому углу.*

Формулы этой группы пишут также в виде пропорции

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=k \qquad (3)^*$$

и формулируют словами так:

sin-*ы сторон пропорциональны* sin-*ам противолежащих углов*. Это свойство сферического треугольника было известно еще Менелаю Александрийскому.

IV группа основных формул (формула котангенсов или четырех рядом лежащих элементов)

Помощью рис. 83 и 84 длину перпендикуляра PR можно выразить двумя разными формулами: во-первых,

$$PR=QS-QT=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A;$$

а, с другой стороны,

$$PR=CP\operatorname{ctg}B=\sin b\sin A\operatorname{ctg}B,$$

откуда получаем

$$\operatorname{ctg}B\sin A=\operatorname{ctg}b\sin c-\cos c\cos A.$$

Эту формулу следует читать так:

ctg *крайнего угла, умноженный на* sin *среднего угла, равен произведению* ctg-*а крайней стороны на* sin *средней стороны минус произведение* cos-*ов средних элементов.*

Круговой перестановкой букв получаем еще две другие формулы. Так как четыре рядом лежащих элемента могут следовать один за другим и в направлении, обратном движению часовой стрелки, т. е. в порядке B, a, C, b, то можно написать аналогично

$$\operatorname{ctg}B\sin C=\operatorname{ctg}b\sin a-\cos a\cos C.$$

Круговой перестановкой букв получим еще две формулы.

Таким образом, шесть формул этой группы можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}B\sin A=\operatorname{ctg}b\sin c-\cos c\cos A\\
&\operatorname{ctg}C\sin B=\operatorname{ctg}c\sin a-\cos a\cos B\\
&\operatorname{ctg}A\sin C=\operatorname{ctg}a\sin b-\cos b\cos C\\
&\operatorname{ctg}B\sin C=\operatorname{ctg}b\sin a-\cos a\cos C\\
&\operatorname{ctg}C\sin A=\operatorname{ctg}c\sin b-\cos b\cos A\\
&\operatorname{ctg}A\sin B=\operatorname{ctg}a\sin c-\cos c\cos B
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Из рассмотрения формул (1)—(4) видно, что если задать три какие угодно элемента сферического треугольника, то остальные три можно вычислить, пользуясь одной из приведенных 15 основных формул сферической тригонометрии.

Приведенные четыре группы формул являются основными; все остальные формулы сферической тригонометрии получаются помощью алгебраических преобразований основных, а могут быть выведены и из одной только первой их группы, т. е. из формул косинусов.

§ 3. Промежуточные формулы, связывающие пять элементов треугольника

Пять элементов в треугольнике могут быть или три стороны и два угла, или, наоборот, три угла и две стороны и в обоих случаях эти пять элементов могут следовать один за другим или по направлению движения часовой стрелки, или против.

Для первого случая имеются шесть формул:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a\cos B &= \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A\\
\sin b\cos C &= \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B\\
\sin c\cos A &= \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C\\
\sin a\cos C &= \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A\\
\sin b\cos A &= \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B\\
\sin c\cos B &= \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эти формулы следует читать так:

sin *стороны, умноженный на* cos *прилежащего угла, равен произведению* cos-*а стороны, противолежащей этому углу, на* sin *третьей стороны минус произведение их наоборот* *), *умноженное на* cos *угла, лежащего против первой стороны.*

Вывод их основан на том, что на рис. 84 $PR = QS - QT = QS - PQ\cos c$.

Для второго случая будут служить следующие шесть формул:

$$\left.\begin{aligned}
\sin A\cos b &= \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a\\
\sin B\cos c &= \cos C\sin A + \sin C\cos A\cos b\\
\sin C\cos a &= \cos A\sin B + \sin A\cos B\cos c\\
\sin A\cos c &= \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos a\\
\sin B\cos a &= \cos A\sin C + \sin A\cos C\cos b\\
\sin C\cos b &= \cos B\sin A + \sin B\cos A\cos c
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для запоминания эти формулы следует читать так:

sin *угла, умноженный на* cos *прилежащей стороны, равен произведению* cos-*а угла, лежащего против первой стороны, на* sin *третьего угла плюс произведение их наоборот* *), *умноженное на* cos *стороны, противолежащей первому углу.*

Эти формулы получаются из предыдущих, если написать последние для полярного треугольника и перейти от него к основному.

§ 4. Преобразование основных формул (приведение их к логарифмическому виду) и формулы для сферических радиусов вписанного и описанного кругов и для сферического избытка

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}\\
\sin^2\frac{B}{2} &= \frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}\\
\sin^2\frac{C}{2} &= \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}\\
\cos^2\frac{B}{2} &= \frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}\\
\cos^2\frac{C}{2} &= \frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

*) Это значит, что sin и cos соответствующих элементов следует переставить местами.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} &= \frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} &= \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) \tag{4}$$

Полагая

$$\operatorname{tg}^2\rho = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}, \tag{5}$$

вместо (3) получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-b)} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-c)} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ρ — есть сферический радиус круга, вписанного в данный сферический треугольник.

Полагая $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$, из полярного треугольника по формулам (1) — (4) найдем:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{a}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C} \\ \sin^2\frac{b}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-B)}{\sin C\sin A} \\ \sin^2\frac{c}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\frac{a}{2} &= \frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C} \\ \cos^2\frac{b}{2} &= \frac{\cos(P-C)\cos(P-A)}{\sin C\sin A} \\ \cos^2\frac{c}{2} &= \frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\sin A\sin B} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{b}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-B)}{\cos(P-C)\cos(P-A)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{c}{2} &= -\frac{\cos P\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Более обычный вид этих формул такой: так как сферический избыток $\varepsilon = A+B+C-\pi = 2P-\pi$, то вместо (9) получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} &= \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{b}{2} &= \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \\ \operatorname{tg}^2\frac{c}{2} &= \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Полагая

$$\operatorname{tg}^2 R = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \operatorname{tg} R\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \operatorname{tg} R\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \operatorname{tg} R\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

R — есть сферический радиус круга, описанного около данного сферического треугольника.

Сферический избыток $\varepsilon = A+B+C-\pi$, выраженный в радианах, численно равен площади сферического треугольника при радиусе шара, равном единице. Через стороны треугольника он выражается формулой L'Huilier:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}, \qquad (12)$$

а через стороны и один из углов — формулой:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C \qquad (13)$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos C}. \qquad (14)$$

§ 5. Формулы Деламбра-Гаусса

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{c}{2}}\\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}}\\ \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{c}{2}}\\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{c}{2}}\end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Аналогии Непера

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \\
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \\
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \\
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 6. Прямоугольные и прямосторонние треугольники

Так как в прямоугольном треугольнике (рис. 85) один элемент — прямой угол A — всегда известен, то для задания треугольника надо еще знать только два элемента. Из пяти элементов по два можно составить 10 сочетаний, поэтому число всевозможных случаев задания прямоугольного треугольника будет равно именно 10. Эти 10 случаев получаются, если во всех предыдущих формулах (1)—(6) § 2 положить $A = 90°$.

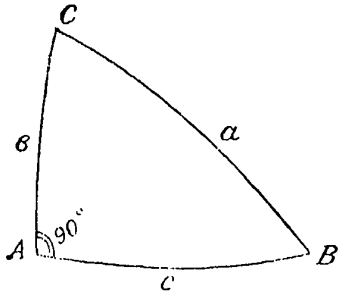


Рис. 85.

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin b &= \sin B \sin a \\
\sin c &= \sin C \sin a
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} B \sin c \\
\operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} C \sin b
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} a \cos C \\
\operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} a \cos B
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos B &= \cos b \sin C \\
\cos C &= \cos c \sin B
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Как видно, эти 10 формул сводятся к 6 группам, которые удобно для запоминания читать так:

Гипотенуза.

1. cos *гипотенузы* = *произведению* cos-*ов катетов.*
2. cos *гипотенузы* = *произведению* ctg-*ов прилежащих углов.*

Катеты.

3. sin *катета* = sin-*у гипотенузы, умноженному на* sin *противолежащего угла.*
4. tg *катета* = tg-*у противолежащего угла, умноженному на* sin *другого катета.*
5. tg *катета* = tg-*у гипотенузы, умноженному на* cos *угла между ними.*

Углы.

6. cos *угла* = cos-*у противолежащего катета умноженному на* sin *другого угла.*

Положив в предыдущих формулах (1)—(4) § 2 $a = 90°$, получим 10 формул, относящихся к „прямостороннему“ или „квадрантному“ треугольнику (рис. 86).

$$\cos A = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos b &= \cos B \sin c \\ \cos c &= \cos C \sin b \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin C &= \sin c \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos b &= -\operatorname{ctg} A \operatorname{tg} C \\ \cos c &= -\operatorname{ctg} A \operatorname{tg} B \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \operatorname{tg} b \sin C \\ \operatorname{tg} C &= \operatorname{tg} c \sin B \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\cos A = -\cos B \cos C \qquad (12)$$

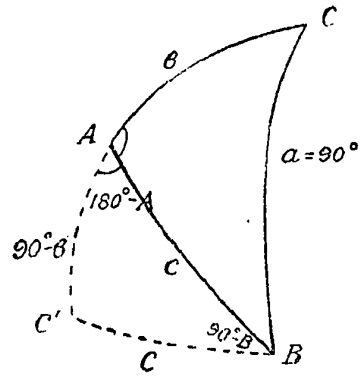


Рис. 86.

Само собой разумеется, все эти формулы можно получить из формул (1)—(6) настоящего параграфа, применив их к треугольнику, полярному данному прямоугольному. Поэтому эти 10 формул могут быть сведены в 6 групп, аналогично случаю прямоугольного треугольника.

Угол против „прямой“ стороны:

7. cos *угла против „прямой“ стороны* = *отрицательному произведению* cos-*ов двух других углов.*

8. cos *угла против „прямой“ стороны* = *отрицательному произведению* ctg-*ов прилежащих сторон.*

Углы, прилежащие к „прямой“ стороне:

9. sin *угла* = sin-*у противолежащей стороны на* sin *угла против „прямой“ стороны.*

10. tg *угла* = tg-*у противолежащей стороны на* sin *другого угла.*

11. tg *угла* = *отрицательному* tg-*у угла против „прямой“ стороны на* cos *стороны, лежащей между ними.*

12. cos *стороны* = cos *противолежащего угла на* sin *другой стороны.*

Впрочем, если продолжить сторону CA прямостороннего треугольника (рис. 86) и отложить вдоль нее $AC' = 90° - b$, то решение прямостороннего сферического треугольника ABC всегда можно свести также к решению прямоугольного сферического треугольника ABC', дополняющего данный до треугольника с двумя сторонами по 90° и двумя углами по 90°.

Примечание. Легко заметить, что все формулы прямоугольных и прямосторонних треугольников можно привести к двум типам:

$$\operatorname{tg} w = \sin u \operatorname{tg} v$$
$$\sin w = \sin u \sin v,$$

где w, u и v — суть или сами элементы, или их дополнения до 90°. Формулы (2) и (3) имеют указанный вид. Формулу (5) $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$ можно написать:

$\operatorname{tg}(90^\circ - C) = \sin(90^\circ - a)\operatorname{tg} B$, т. е. привести к формуле tg-ов; формулу $\cos C = \cos c \sin B$ можно привести к виду формулы sin-ов, переписав ее так:

$$\sin(90^\circ - C) = \sin(90^\circ - c)\sin B.$$

Правила Модюи-Непера (для прямоугольного треугольника).

1. cos *средней части равен произведению* ctg-*ов крайних частей.*

2. cos *отдельной части равен произведению* sin-*ов частей, отдельно лежащих (несмежных),* при этом прямой угол не считается разделяющим, и вместо катетов надо брать их дополнения до 90°.

Правила Модюи-Непера можно видоизменить так, чтобы они были одинаково годны как для прямоугольного треугольника, так и для прямостороннего.

Напишем элементы прямоугольного треугольника (рис. 85 и 87) вкруговую, как они следуют в треугольнике, по стрелке часов, но вместо гипотенузы a и углов B и C напишем дополнения их до 90°. Тогда каждый элемент можно рассматривать как лежащий посередине

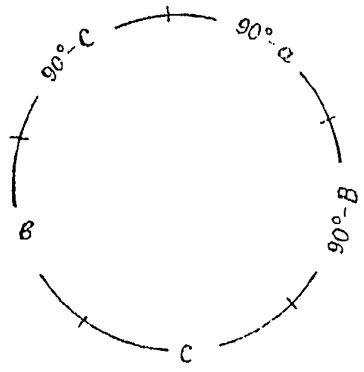


Рис. 87.

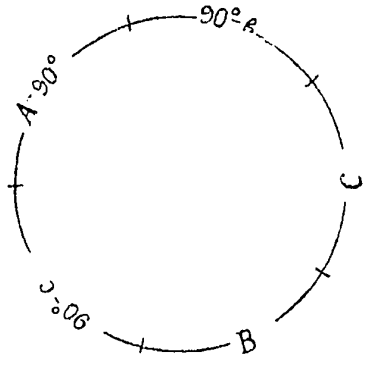


Рис. 88.

между двумя крайними или имеющий против себя два других элемента, и тогда правила будут следующие:

3. sin *средней части равен произведению* tg-*ов крайних частей.*

4. sin *отдельной части равен произведению* cos-*ов противоположных частей.*

Чтобы эти же правила применить к прямостороннему треугольнику (рис. 86 и 88), элементы его следует написать вкруговую по стрелке часов, как показано на рис. 88, т. е. считать вместо данных элементов такие: B, $90^\circ - c$, $A - 90^\circ$, $90^\circ - b$ и C. Сторона $a = 90^\circ$ не является разделяющей, так что углы B и C надо считать рядом лежащими, что и показано на рис. 88.

§ 7. Решение прямоугольных сферических треугольников

Все шесть возможных случаев задания двух элементов, необходимых для полного решения прямоугольного сферического треугольника, сведены в таблицу формул решения прямоугольных сферических треугольников.

Таблица формул решения прямоугольных сферических треугольников

№№	Дано	Найти	Основные формулы	Формулы для определения искомых по tg-ам половины угла	Формулы для определения искомых по tg-ам целого угла	Формулы для определения искомых по натуральным величинам	
I	Гипотенуза a катет b	Катет c углы B и C	$\cos c = \cos a : \cos b$ $\sin B = \sin b : \sin a$ $\cos C = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$ $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a+b)$ $\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \sin(a-b) : \sin(a+b)$ формулы Каньоли (Cagnoli)	$\operatorname{tg} c = \frac{\mu}{\cos a}$ $\operatorname{ctg} B = \frac{\mu}{\sin b}$ $\operatorname{tg} C = \frac{\mu}{\cos a \sin b}$ $\mu^2 = \sin(a+b)\sin(a-b)$		Если задан катет c, то в этих формулах надо заменить буквы: b — буквой c B — буквой C
II двойств. случай	Катет b противолежащий угол B	Гипотенуза a катет c угол C	$\sin a = \sin b : \sin B$ $\sin c = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} B$ $\sin C = \cos B : \cos b$	$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(B+b)$ $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right) = \sin(B-b) : \sin(B+b)$ $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+b)$ формулы Каньоли (Cagnoli)	$\operatorname{tg} a = \frac{\sin b}{\nu}$ $\operatorname{tg} c = \frac{\cos B \sin b}{\nu}$ $\operatorname{tg} C = \frac{\cos B}{\nu}$ $\nu^2 = \sin(B+b)\sin(B-b)$		Если заданы катет c и угол B, то в этих формулах надо заменить буквы: b — буквой c B — буквой C
III	Угол B угол C	Гипотенуза a катет b катет c	$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$ $\cos b = \cos B : \sin C$ $\cos c = \cos C : \sin B$	$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = -\cos(C+B) : \cos(C-B)$ $\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C+B) - 45^\circ\right] \operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}(C-B) + 45^\circ\right]$ $\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C+B) - 45^\circ\right] \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C-B) + 45^\circ\right]$ формулы Деламбра (Delambre)	$\operatorname{tg} a = \frac{\lambda}{\cos B \cos C}$ $\operatorname{tg} b = \frac{\lambda}{\cos B}$ $\operatorname{tg} c = \frac{\lambda}{\cos C}$ $\lambda^2 = -\cos(B+C)\cos(B-C)$		
IV	Катет b прилежащий угол C	Гипотенуза a катет c угол B	$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b : \cos C$ $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \sin b$ $\cos B = \cos b \sin C$	$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right)\end{array}\right\}$ формулы Кларка (Clarke) $\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - y)$ $\operatorname{tg} y = \cos b \sin C$		$\cos B = \frac{1}{2}[\sin(C+b) + \sin(C-b)]$	Если заданы катет c и угол C, то в этих формулах надо заменить буквы: b буквой c C буквой B
V	Гипотенуза a угол B	Катет b катет c угол C	$\sin b = \sin a \sin B$ $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$ $\operatorname{ctg} C = \cos a \operatorname{tg} B$	$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right) = \operatorname{tg}(45^\circ - z)$ $\operatorname{tg} z = \sin a \sin B$ $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-c) = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$ $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+c) = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$		$\sin b = \frac{1}{2}[\cos(B-a) - \cos(B+a)]$	Если задан угол C, то в этих формулах надо заменить буквы: C буквой B c буквой b
VI	Катет b катет c	Гипотенуза a угол B угол C	$\cos a = \cos b \cos c$ $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b : \sin c$ $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c : \sin b$	$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - x)$ $\operatorname{tg} x = \cos b \cos c$ $\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C+B) - 45^\circ\right] = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(C-B) + 45^\circ\right] = \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}\end{array}\right\}$ формулы Кларка (Clarke)		$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(c+b) + \cos(c-b)]$	

§ 8. Решение косоугольных сферических треугольников

Все случаи решения треугольников можно свести к следующим шести заданиям:

1. Даны три стороны a, b, c; найти три угла A, B, C.
2. Даны две стороны b и c и угол A между ними; найти два угла B и C и сторону a.
3. Даны две стороны a и b и угол A против одной из них; найти два угла B и C и сторону c.
4. Даны три угла A, B и C; найти три стороны a, b, c.
5. Даны два угла B и C и сторона a между ними; найти две стороны b и c и угол A.
6. Даны два угла A и B и сторона против одного из них; найти стороны b и c и угол C.

Легко понять, что 4, 5 и 6-й случаи легко привести к 1, 2 и 3-му, если перейти к полярному треугольнику. Но можно все шесть случаев решать независимо. В задачах мореходной астрономии наиболее важное значение имеют случаи 1, 2 и 3-й.

Решение треугольников осуществляется следующим путем: из формул (1) — (6) § 2—5, приведенных выше, выбирают такую, которая связывает неизвестные элементы с заданными. Из такого уравнения искомая неизвестная определяется помощью соответствующих таблиц тригонометрических функций. При практическом определении неизвестных не безразлично, определяются ли все элементы сразу или только один какой-нибудь или даже два.

Те формулы, которые выгодно применять при определении всех элементов, могут оказаться менее удобными, если требуется найти только один какой-нибудь элемент. Кроме того, необходимо иметь в виду, какими вычислительными средствами пользуются. Если применяют, как обычно, логарифмические вычисления, то основные формулы приходится или преобразовывать так, чтобы искомую величину определять по логарифмической формуле, или применять таблицы логарифмов сумм и разностей. Но если при вычислениях пользоваться таблицами натуральных величин и арифмометром, то часто основные формулы оказываются наиболее удобными.

Если искомый элемент входит под знаком sin-а и cos-а одновременно, то понятно, что основными формулами непосредственно пользоваться без последующего преобразования их нельзя.

Можно, наконец, применять комбинированный прием, пользуясь и логарифмическими таблицами и таблицами натуральных величин.

Всякий сферический треугольник можно решить, разбив его на два прямоугольных; этот способ решения часто является наиболее удобным. Выгода его заключается в возможности пользоваться формулами только прямоугольных треугольников. Однако, применение этого метода непрактично при заданных трех сторонах или трех углах; во всех других случаях такой способ будет весьма удобен.

1-й случай Даны три стороны a, b и c.

1. Найти все три угла.

Надо пользоваться формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2 \rho = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}; \qquad p = \frac{1}{2}(a+b+c) \\ &\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-a)}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-b)}; \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\sin(p-c)} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2. Найти один угол, например A.

Надо пользоваться формулами:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}\quad\text{или}\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}=$$
$$=\frac{\cos(b-c)}{2\sin b\sin c}\left(1-\frac{\cos a}{\cos(b-c)}\right). \tag{2}$$

Первая формула логарифмическая; вторая и третья формулы требуют применения таблиц логарифмов сложения и вычитания.

3. Из основного уравнения (1) § 2 для cos-а получаем

$$\cos A=\cos a\operatorname{cosec} b\operatorname{cosec} c-\operatorname{ctg} b\operatorname{ctg} c. \tag{3}$$

2-й случай Даны две стороны b и c и угол A между ними (рис. 89).

1. Найти два угла B и C и сторону a.

Для этого надо взять вторые аналогии Непера:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)&=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)&=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

а) Сторона a может быть получена по одной из первых аналогий Непера

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}. \tag{5}$$

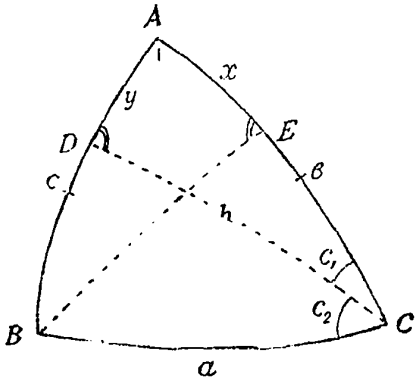


Рис. 89.

б) Сторону a можно найти по формулам:

$$\sin a=\sin A\,\frac{\sin c}{\sin C}=$$
$$=\sin A\,\frac{\sin b}{\sin B}. \tag{6}$$

в) Наконец, сторону a можно найти по формуле:

$$\cos a=\cos b\cos c+$$
$$+\sin b\sin c\cos A, \tag{7}$$

придавая ей различный вид, как показано для 3-го случая.

2. Можно каждую неизвестную определить независимо одну от другой, применяя следующие основные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg} B\sin A&=\operatorname{ctg} b\sin c-\cos A\cos c\\ \operatorname{ctg} C\sin A&=\operatorname{ctg} c\sin b-\cos A\cos b\\ \cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Вычисление неизвестных B, C и a по этим формулам может быть выполнено разными способами:

1) По логарифмам помощью таблиц логарифмов сумм и разностей.

2) Смешанным способом — по логарифмам и таблицам натуральных величин.

3) На арифмометре, пользуясь только таблицами натуральных величин.

4) Приведением формул к логарифмическому виду.

5) Разделяя треугольник на два прямоугольных, что является геометрическим толкованием решения пункта 4.

Пункты 1, 2 и 3 не требуют пояснений.

Пункт 4 понятен из следующего.

Введем вспомогательную величину y.

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b \cos A \tag{9}$$

Тогда 1-я и 3-я из формул (8) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \frac{\sin y \operatorname{tg} A}{\sin (c-y)} = \frac{\sin A \operatorname{tg} b \cos y}{\sin (c-y)} \\ \cos a &= \frac{\cos b \cos (c-y)}{\cos y} = \frac{\sin b \cos A}{\sin y} \cos (c-y) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а со вспомогательной величиной x —

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c \cos A \tag{11}$$

будет:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin x \operatorname{tg} A}{\sin (b-x)} = \frac{\sin A \operatorname{tg} c \cos x}{\sin (b-x)} \tag{12}$$

Пункт 5 понятен из следующего: из вершины C опустим перпендикуляр CD на сторону BA; тогда в прямоугольном треугольнике ACD катет $AD = y$; для катета $DC = h$ $\sin h = \sin DC = \sin b \sin A$ или же

$$\operatorname{tg} DC = \sin y \operatorname{tg} A;$$

угол C разделится на две части C_1 и C_2, и полное решение задачи дают следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \operatorname{tg} b \cos A \\ \operatorname{tg} B &= \frac{\sin y \operatorname{tg} A}{\sin (c-y)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos b \cos (c-y)}{\cos y} \\ \operatorname{ctg} C_1 &= \cos b \operatorname{tg} A \\ \operatorname{tg} C_2 &= \frac{\operatorname{tg} (c-y)}{\sin b \sin A} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$C = C_1 + C_2$$

Если по cos-у сторона a определяется ненадежно, то можно воспользоваться формулой:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} (c-y)}{\cos B}, \tag{15}$$

которая определяет a по tg-у, но зато через найденный угол B. Отсюда видно, что приведение основных формул к логарифмическому виду и

разделение сферического треугольника на два прямоугольных приводят к одним и тем же формулам.

3. Неполное решение.

а) Найти одну сторону a.

На практике этот случай встречается чрезвычайно часто и имеет большое значение в вопросах мореходной астрономии. Обычное решение заключается в применении основной формулы

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{7}$$

Используя один из пяти приемов, указанных для той же цели в случае 2, эту формулу можно представить в одном из следующих видов:

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2} \tag{16$_1$}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b-c}{2} + \sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2} \tag{16$_2$}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b-c}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{b+c}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \tag{16$_3$}$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{b-c}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{b+c}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \tag{16$_4$}$$

$$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(b-c) + \cos(b+c)] + \frac{1}{2}[\cos(b-c) - \cos(b+c)]\cos A \tag{16$_5$}$$

В логарифмическом виде формулы эти удобно представить иначе. Положив в формуле $\cos a$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b \cos A, \text{ получим } \cos a = \frac{\cos b \cos(c-y)}{\cos y}. \tag{17}$$

Полагая в формуле (16)$_2$ (Delambre)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} A \sqrt{\sin b \sin c}}{\sin \frac{1}{2}(b-c)}, \text{ получим } \sin \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \theta} \tag{18}$$

или еще, положив в формуле (16)$_3$ (К. Ф. Гаусс)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)}, \text{ найдем } \sin \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \psi} \tag{19}$$

б) Найти сторону a и угол C.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} c \cos A \\ \operatorname{tg} C &= \frac{\operatorname{tg} A \sin x}{\sin(b-x)} \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{tg}(b-x)}{\cos C} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Геометрически величина x представляет собой дугу AE в прямоугольном треугольнике ABE, получаемом если из точки B опустить перпендикуляр (сферический) BE на противолежащую сторону AC (рис. 89).

3-й случай Даны две стороны a и b и угол A против одной из них.

Условие возможности существования треугольника:

$$\sin b \sin A \leqslant \sin a. \qquad (*)$$

В противном случае треугольник невозможен.

Угол B, противолежащий стороне b, определяется по формуле sin-ов:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}. \qquad (21)$$

В случае возможности задания треугольника угол B, находимый по sin-у, может иметь два значения: B_1 и $B_2 = 180° - B_1$.

Двойственное решение получится при следующих условиях:

1) если $A < 90°$, то должно быть $a < b$ и $a + b < 180°$
2) „ $A > 90°$, то должно быть $a > b$ и $a + b > 180°$ $\qquad (**)$

Если эти условия не выполнены, то задача имеет или одно решение, или совсем не имеет решения.

1. Полное решение. Найти B_1 C_1 и c_1 и B_2 C_2 и c_2.

1-е решение

$$\sin B_1 = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \qquad B_2 = 180° - B_1 \qquad (22)$$

$$s = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \qquad k = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \qquad (23)$$

$$S = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B_1)}{\sin \frac{1}{2}(A-B_1)} \qquad K = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B_1)}{\cos \frac{1}{2}(A-B_1)} \qquad (24)$$

$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} C_1 = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B_1) = k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B_1) \qquad (25)$$

$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} C_2 = -k \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(A - B_1) = -s \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(A + B_1) \qquad (26)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_1 = S \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = K \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b) \qquad (27)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_2 = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{K} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{S} \qquad (28)$$

Если угол B близок к 90°, то его лучше находить по формуле

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{B}{2}\right) &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-h) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(a+h) \\ \sin h &= \sin b \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

где

2-е решение

Можно каждую неизвестную находить независимо одну от другой по основным формулам:

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \operatorname{ctg} a \sin b &= \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

причем для определения неизвестных c и C из двух последних уравнений надо или привести их к логарифмическому виду, или разделить треугольник на два прямоугольных дугой CD, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне AB. Обозначая через y и h катеты AD и CD, а через ψ угол ACD, получим в треугольнике ACD (рис. 90):

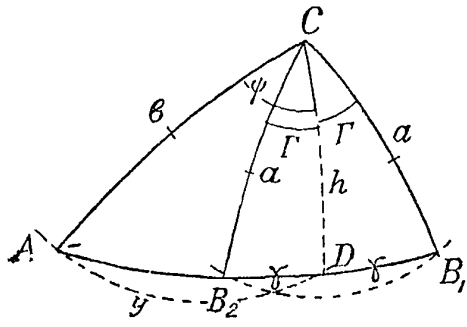


Рис. 90.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \operatorname{tg} b \cos A \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b} \\ \sin h &= \sin b \sin A \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Для второго треугольника B_1DC по данным h и a имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos \Gamma &= \frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} b \cos \psi}{\operatorname{tg} a} \\ \cos \gamma &= \frac{\cos a}{\cos h} = \frac{\cos a \cos y}{\cos b} \\ \sin B &= \frac{\sin h}{\sin a} = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Так как угол Γ и катет γ определяются по cos-у, то будет два значения $+\Gamma$ и $-\Gamma$ и $+\gamma$ и $-\gamma$, а для B получим два значения B_1 и $B_2 = 180° - B_1$ и два решения будут:

$$\left.\begin{aligned} B_1 \qquad & B_2 = 180° - B_1 \\ c_1 = y + \gamma \qquad & c_2 = y - \gamma \\ C_1 = \psi + \Gamma \qquad & C_2 = \psi - \Gamma \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Если углы Γ и γ по cos-ам или B по sin-у получаются неблагонадежно, то для определения их можно пользоваться такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+h) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-h) \\ \operatorname{tg}^2 \left(45° - \frac{B}{2}\right) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-h) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a+h) \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\Gamma}{2} &= \frac{\sin (a-h)}{\sin (a+h)} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

2. Неполное решение.

а) Найти один угол B.

Надо применить формулы, относящиеся ко 2-му решению из групп (30) — (34), дающие угол B.

б) Определить одну сторону c или угол C.

Надо применить формулы (30) — (34), дающие угол C. Здесь выгодно второе решение, как дающее возможность находить каждый элемент независимо от других.

Рассмотренные системы формул дадут решение сферического треугольника и в случаях 4—6, если применить эти формулы к полярному треугольнику, т. е. заменить в них a, b, c, A, B, C через $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, $180° - a$, $180° - b$ и $180° - c$ соответственно. Поэтому достаточно привести здесь лишь некоторые из получаемых в результате этого преобразования формул.

4-й случай Даны A, B и C. Находят a, b и c.

Задача может быть решена по формулам (7) и (9) § 4.

5-й случай Даны B, C и a. Находят b, c и A.

Задача может быть решена помощью аналогий Непера (§ 5).

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\frac{a}{2};\quad \operatorname{tg}\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\frac{a}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{ctg}\frac{B-C}{2}.$$

6-й случай Даны A, B и a.

Надо, как сказано выше, перейти к элементам полярного a', b и A и, решив его, как указано в 3-м случае, получить искомые элементы заданного, пользуясь свойствами полярного треугольника.

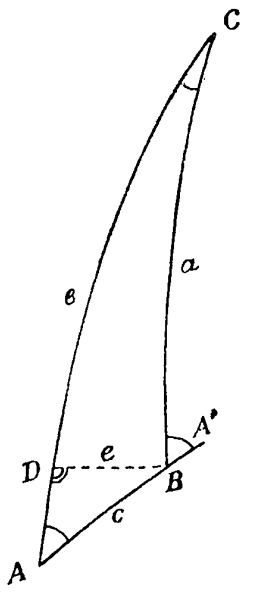


Рис. 91.

§ 9. Элементарные сферические треугольники

Часто приходится иметь дело с такими сферическими треугольниками, у которых некоторые элементы малы. Таких треугольников можно представить себе 2 типа.

1-й тип. Треугольник, у которого все три стороны малы. Такой треугольник можно рассматривать как плоский и применять к нему формулы плоской тригонометрии, считая, однако, что стороны выражены в угловой мере. Если почему-либо надо длины сторон выражать в линейных мерах, то стороны, выраженные в радианах, надо умножить на радиус той сферы, на которой нанесен треугольник.

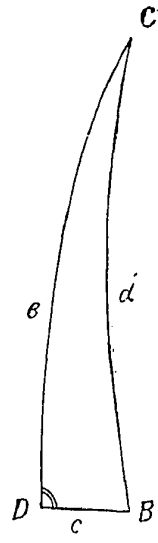


Рис. 92.

2-й тип. Если в сферическом треугольнике ABC (рис. 91) сторона c и противолежащий угол C величины малые, то общие формулы сферической тригонометрии упрощаются. Считая сторону c и угол C малыми первого порядка, решение треугольника с точностью до величин первого порядка получается из следующих формул:

а) Прямоугольный треугольник CDB (рис. 92).

$$1.\ b\approx d. \tag{1}$$

$$2.\ d-b\approx\frac{C^3}{4}\sin 2b\ \operatorname{arc}1''\approx\frac{C^3}{4}\sin 2d\ \operatorname{arc}1''. \tag{2}$$

$$3.\ c\approx C\sin b\approx C\sin d. \tag{3}$$

$$4.\ B\approx\frac{\pi}{2}-C\cos b\approx\frac{\pi}{2}-C\cos d. \tag{4}$$

Формула (2) показывает, что разность между гипотенузой d и конечным катетом b прямоугольного элементарного треугольника есть величина второго порядка, а, значит, с точностью до величин первого порядка можно полагать, что катет и гипотенуза равны.

Формула (4) показывает, что если $d \approx b \approx \frac{\pi}{2}$, то угол B можно считать равным $\frac{\pi}{2}$, т. е. точка C будет полюсом дуги $c = BD$.

б) Косоугольный треугольник ABC (рис. 91).

$$1.\ b - a \approx c \cos A \approx c \cos A'. \tag{5}$$

A' — внешний угол при точке B.

$$2.\ e \approx c \sin A \approx C \sin a \approx C \sin b. \tag{6}$$

$$3.\ A' - A \approx C \cos a \approx C \cos b \approx e \operatorname{ctg} a \approx e \operatorname{ctg} b. \tag{7}$$

4. Сферический избыток ε.

$$\varepsilon \approx 2C \sin^2 \frac{a}{2} \approx 2C \sin^2 \frac{b}{2} \tag{8}$$

или

$$\varepsilon \approx c \sin A \operatorname{tg} \frac{a}{2} \approx c \sin B \operatorname{tg} \frac{b}{2}. \tag{9}$$

Пределы применения формул элементарных треугольников определяются следующими условиями: если ограничить точность вычислений

0″,1,	то	угол	C	должен	быть	не	больше	4′,7	(10)
1″	»	»	»	»	»	»	»	15′	
1′	»	»	»	»	»	»	»	117′	

§ 10. Диференциальные формулы

Так как сферический треугольник определяется тремя элементами и то трем элементам можно придать произвольные элементарно (бесконечно) малые приращения, а остальные три элемента получат при этом определенные бесконечно малые приращения; поэтому бесконечно малые приращения любых четырех элементов связаны всегда одним уравнением. Соответственные уравнения получаются диференцированием основных четырех групп уравнений, приведенных в § 2. Таким образом, получим 15 диференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &da - \cos C db - \cos B dc - \sin b \sin C dA = 0 \\ &db - \cos A dc - \cos C da - \sin c \sin A dB = 0 \\ &dc - \cos B da - \cos A db - \sin a \sin B dC = 0 \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned} &dA + \cos c dB + \cos b dC - \sin B \sin c da = 0 \\ &dB + \cos a dC + \cos c dA - \sin C \sin a db = 0 \\ &dC + \cos b dA + \cos a dB - \sin A \sin b dc = 0 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{ctg} a da + \operatorname{ctg} B dB - \operatorname{ctg} b db - \operatorname{ctg} A dA = 0 \\ &\operatorname{ctg} b db + \operatorname{ctg} C dC - \operatorname{ctg} c dc - \operatorname{ctg} B dB = 0 \\ &\operatorname{ctg} c dc + \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} a da - \operatorname{ctg} C dC = 0 \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin B da - \sin c dA - \sin A \cos c db - \sin a \cos B dC = 0 \\ &\sin C da - \sin b dA - \sin A \cos b dc - \sin a \cos C dB = 0 \\ &\sin C db - \sin a dB - \sin B \cos a dc - \sin b \cos C dA = 0 \\ &\sin A db - \sin c dB - \sin B \cos c da - \sin b \cos A dC = 0 \\ &\sin A dc - \sin b dC - \sin C \cos b da - \sin c \cos A dB = 0 \\ &\sin B dc - \sin a dC - \sin C \cos a db - \sin c \cos B dA = 0 \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

В этих выражениях не указано, какие из трех элементов принимают за переменные независимые и какие будут функции, а, значит, дифференциал любого элемента можно выразить через дифференциалы трех других, пользуясь этими выражениями, считая эти последние за переменные независимые. На основании общих правил дифференциального исчисления коэфициенты при переменных независимых будут частные производные от элемента треугольника по другим, которые принимают за переменные независимые. Так как при дифференцировании по одной переменной независимой две другие остаются постоянными, то формулу частной производной необходимо писать так, чтобы было ясно видно, какие два элемента остаются постоянными.

Так, из первого уравнения группы I следует:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_{\substack{c \\ A}\,|\,\text{const}} = \cos C; \quad \left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)_{\substack{b \\ A}\,|\,\text{const}} = \cos B; \quad \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)_{\substack{b \\ c}\,|\,\text{const}} = \sin b \sin C. \quad (*)$$

Буквы внизу скобок показывают, какие два элемента при дифференцировании считаются постоянными.

Подобным же образом первое уравнение из группы III дает:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_{\substack{B \\ A}\,|\,\text{const}} = \frac{\operatorname{ctg} b}{\operatorname{ctg} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}; \quad \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)_{\substack{b \\ A}\,|\,\text{const}} = -\frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} a} = -\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} B};$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)_{\substack{B \\ b}\,|\,\text{const}} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A} \qquad (**)$$

и т. д.

Эта система обозначений сразу указывает, что является функцией и что — переменными независимыми, а вместе с тем, для каждой отдельной частной производной указывает, какие две из переменных независимых в данном вопросе остаются постоянными. Например, частные производные $\frac{\partial a}{\partial A}$ имеют разное значение, как видно из (*) и (**); поэтому пока не указано, какие элементы треугольника приняты за переменные независимые, до тех пор частные производные элементов сферического треугольника будут неопределенны. Таким образом, частная производная будет вполне определена, если указать, какие два элемента сферического треугольника при этом дифференцировании остаются постоянными.

Очевидно, что общее число различных частных производных одних элементов сферического треугольника по другим может быть только 24, сообразно четырем разным возможным комбинациям двух неизменяющихся элементов, как показано ниже (если не считать обратных величин: $\frac{dA}{da}, \frac{da}{dA}$ и т. д.).

1. Угол и сторона к нему прилежащая при дифференцировании считаются постоянными. Угол A и сторона c постоянны. На рис. 93 они отмечены двумя чертами. В этом случае будет шесть производных:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ \frac{da}{db} = \cos C & 2.\ \frac{da}{dB} = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} C} & 3.\ \frac{da}{dC} = -\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} C} \\ 4.\ \frac{db}{dB} = \frac{\sin a}{\sin C} & 5.\ \frac{db}{dC} = -\frac{\operatorname{tg} a}{\sin C} & 6.\ \frac{dB}{dC} = -\frac{1}{\cos a} \end{array}\right\} A,\ c = \text{const.} \qquad (1)$$

2. Угол и сторона ему противолежащая при дифференцировании остаются постоянными. Угол A и сторона a будут постоянны (рис. 94). В этом случае будет шесть производных:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ \frac{db}{dc}=-\frac{\cos B}{\cos C} & 2.\ \frac{db}{dB}=\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} & 3.\ \frac{db}{dC}=-\frac{\sin b}{\cos c \operatorname{tg} B} \\ 4.\ \frac{dc}{dB}=-\frac{\sin c}{\cos b \operatorname{tg} C} & 5.\ \frac{dc}{dC}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} C} & 6.\ \frac{dB}{dC}=-\frac{\cos b}{\cos c} \end{array}\right\} A,\ a=\text{const.} \qquad (2)$$

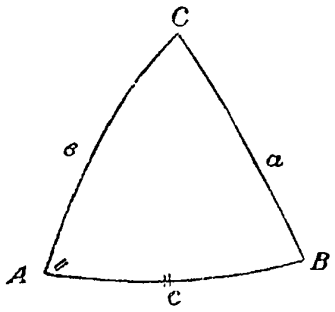


Рис. 93.

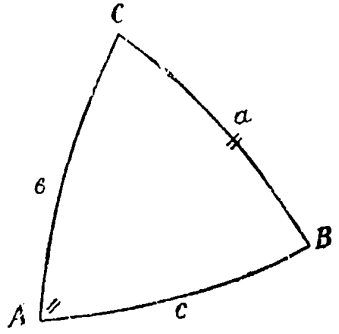


Рис. 94.

3. Две стороны постоянны, например b и c (рис. 95).

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \frac{da}{dA}=\sin b \sin C & 2.\ \frac{da}{dB}=-\sin a \operatorname{tg} C \\ 3.\ \frac{da}{dC}=-\sin a \operatorname{tg} B & 4.\ \frac{dA}{dB}=-\frac{\sin A}{\sin B \cos C} \\ 5.\ \frac{dA}{dC}=-\frac{\sin A}{\sin C \cos B} & 6.\ \frac{dB}{dC}=\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} \end{array}\right\} b,\ c=\text{const.} \qquad (3)$$

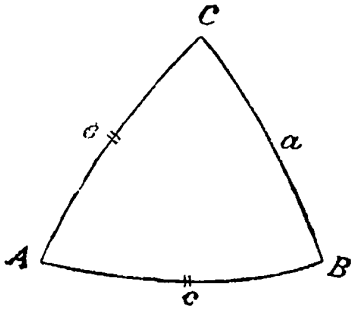


Рис. 95.

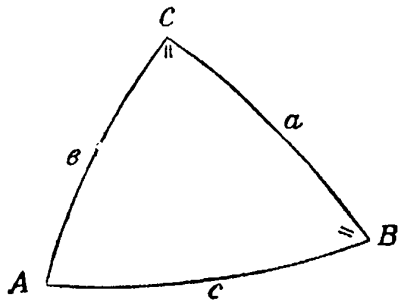


Рис. 96.

4. Два угла постоянны, например B и C (рис. 96).

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \frac{da}{db}=\frac{\sin a}{\sin b \cos c} & 2.\ \frac{da}{dc}=\frac{\sin a}{\sin c \cos b} \\ 3.\ \frac{da}{dA}=\frac{1}{\sin B \sin c} & 4.\ \frac{db}{dc}=\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \\ 5.\ \frac{db}{dA}=\frac{1}{\sin A \operatorname{tg} c} & 6.\ \frac{dc}{dA}=\frac{1}{\sin A \operatorname{tg} b} \end{array}\right\} B,\ C=\text{const.} \qquad (4)$$

Надо заметить, что для той же самой группы, т. е. при тех же постоянных элементах, написанные частные производные представляют собой обыкновенные производные, что отмечено прямыми знаками d, а потому их можно рассматривать как дроби, например:

$$\frac{dc}{db}=\frac{da}{db}:\frac{da}{dc}=\frac{\sin a}{\sin b\cos c}:\frac{\sin a}{\sin c\cos b}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}=1:\frac{db}{dc}$$

и сообразно этому $$\frac{dc}{dA}=1:\frac{dA}{dc}=\sin A\operatorname{tg} b.$$

Но в разных группах производные следует считать как частные, т. е. писать символы дифференциалов круглыми буквами ∂ и поэтому рассматривать их как дроби нельзя.

Пользуясь приведенной таблицей производных, можно не применять формул (I) и (IV), а, чтобы написать любую производную помощью этих таблиц, следует произвести простую замену одних букв другими в той группе соответственной формулы, которая отвечает двум постоянным элементам рассматриваемого случая.

Чтобы этим приемом написать полный дифференциал какого-нибудь элемента, например ΔA для первого уравнения II группы, надо поступить так: считая, что $A=f(B, C, a)$, пишем сначала по общим правилам дифференциального исчисления (глава 1, отд. II, § 4)

$$\Delta A=\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_{\substack{C\\ a}\mid\text{const}}\Delta B+\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_{\substack{B\\ a}\mid\text{const}}\Delta C+\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_{\substack{B\\ C}\mid\text{const}}\Delta a,$$

затем из таблицы из разных групп выбираем частные производные:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_{\substack{C\\ a}\mid\text{const}}&=-\cos c\qquad\text{аналогично формуле 6 (1)}\\ \left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_{\substack{B\\ a}\mid\text{const}}&=-\cos b\qquad\text{6 (1)}\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_{\substack{B\\ C}\mid\text{const}}=\sin B\sin c\qquad\text{по формуле 3 (4), переворачивая как обыкновенную производную;}$$

поэтому

$$\Delta A=-\cos c\Delta B-\cos b\Delta C+\sin B\sin c\Delta a,$$

что вполне согласно с первой формулой группы (II).

Геометрический метод нахождения частных производных от элементов сферического треугольника

Наконец, следует указать на третий способ, получения частных производных от элементов сферического треугольника, способ, основанный на применении формул элементарных треугольников. Проще всего метод решения выяснится на нескольких примерах.

1. Найти $\left(\frac{da}{db}\right)_{\substack{c\\ A}\mid\text{const}}$ (I группа)

В сферическом треугольнике ABC (рис. 97) дадим стороне b элементарно малое приращение $CC'=\Delta b$, оставляя угол A и сторону c, согласно условию, неизменными. Соединив точку C' с вершиной B и

опустив сферический перпендикуляр CD на сторону $C'B$ из C, увидим, что

$$C'D = \Delta a.$$

Из элементарного треугольника $CC'D$, прямоугольного при D, имеем $\Delta a = \Delta b \cos C'$.

Переходя к пределу, получим известное уже выражение

$$\left(\frac{da}{db}\right)_{\substack{c \\ A}\,|\,\text{const}} = \cos C.$$

2. Найти $\left(\frac{db}{dc}\right)_{\substack{a \\ A}\,|\,\text{const}}$ (II группа)

В сферическом треугольнике ABC (рис. 98) дадим стороне c элементарно малое приращение $AA' = \Delta c$ и через точку A' проведем дугу большого круга $A'D$ под углом, равным A; приняв точку B за полюс, проведем дугу малого круга $\alpha\beta$ сферическим радиусом $BC = a$ и заметим точку C'; соединив теперь точку C' с B, получим новый треугольник $A'BC'$, соответствующий измененной стороне c на величину Δc. Опустив из A и C сферические перпендикуляры Cq и Ap, можем написать, считая, что дуги AC и $A'C'$ параллельны,

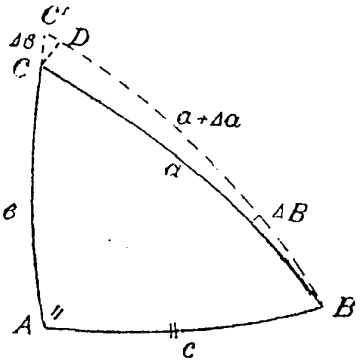


Рис. 97.

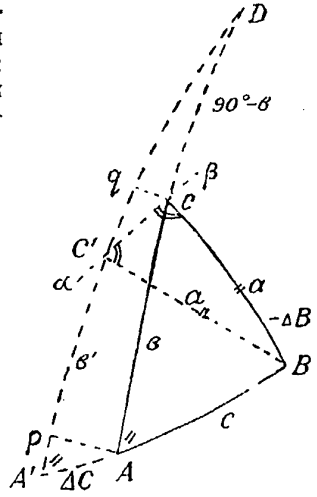


Рис. 98.

$$b' + C'q = b + A'p,$$

поэтому

$$\Delta b = b' - b = A'p - C'q. \qquad (*)$$

В элементарных треугольниках $AA'p$ и $CC'q$ имеем, как в плоских,

$$A'p = \Delta c \cos A'$$
$$C'q = qC \operatorname{tg} C.$$

Величину дуги qC найдем из двух элементарных треугольников ApD и qCD.

$$qC = D \sin(90° - b) = D \cos b$$
$$D = \Delta c \sin A',$$

поэтому $$\Delta b = \Delta c\,[\cos A' - \sin A' \operatorname{tg} C' \cos b];$$

в пределе получим

$$\left(\frac{db}{dc}\right)_{\substack{a \\ A}\,|\,\text{const}} = \frac{\cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b}{\cos C} = -\frac{\cos B}{\cos C}.$$

3. Найти $\left(\frac{da}{dA}\right)_{\substack{c \\ b}\,|\,\text{const}}$ (группа III)

Дадим углу A элементарно малое приращение ΔA (рис. 99) и по стороне AB' отложим дугу $AB' = AB = c$; соединив точки C и B' дугой большого круга, получим новый треугольник ACB', в котором $CB' = a'$ есть новая сторона, изменившаяся вследствие перемены угла A при неизменных сторонах b и c. Опустив из точки B перпендикуляр BD на новую сторону CB', увидим, что $\Delta a = B'D$. В элементарных треугольниках ABB' и $BB'D$ имеем:

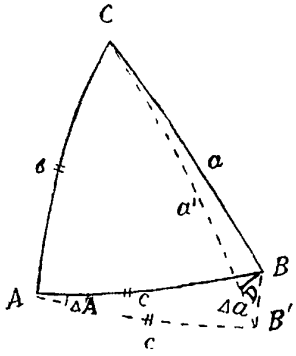


Рис. 99.

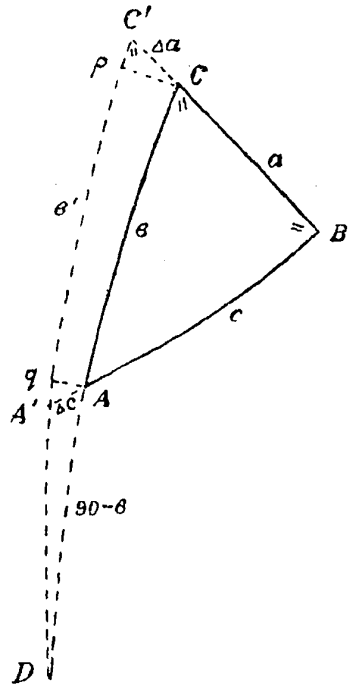


Рис. 100.

$$\Delta a = BB' \cos(90° - B') = BB' \sin B',$$

$$BB' = \Delta A \sin c;$$

поэтому

$$\Delta a = \Delta A \sin B' \sin c$$

или в пределе

$$\left(\frac{da}{dA}\right)_{\substack{c \\ b}\,|\,\text{const}} = \sin B \sin c = \sin b \sin C.$$

4. Найти $\left(\frac{da}{dc}\right)_{\substack{c \\ B}\,|\,\text{const}}$ (группа IV)

Дадим стороне a элементарно малое приращение $\Delta a = CC'$, при точке C' проведем дугу большого круга $C'D$ под углом $C' = C$ и

заметим точку A' пересечения этой дуги с продолжением стороны AB в точке A'; тогда отрезок $AA' = \Delta c$ (рис. 100).

Продолжив сторону b до пересечения ее в точке D с продолжением стороны b', рассмотрим два элементарных треугольника $AA'D$ и $CC'D$, которые дают:

$$Aq = \Delta c \sin A' = D \sin (90° - b) = D \cos b,$$

$$D = \Delta a \sin C';$$

поэтому

$$\Delta C \sin A' = \Delta a \sin C' \cos b.$$

В пределе получим

$$\left(\frac{da}{dc}\right)_{\substack{B \\ C}\,\text{const}} = \frac{\sin A}{\sin C \cos b} = \frac{\sin a}{\sin c \cos b}.$$

Совершенно такими же приемами могут быть выведены и другие производные в каждой из четырех групп, на чем мы не будем останавливаться.

Несомненным преимуществом геометрического метода перед аналитическими является его наглядность, а, кроме того, в большинстве случаев и относительная простота выводов.

Глава 5

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Аналитическая геометрия на плоскости

Стр.

§ 1. Различные системы координат для определения положения точки на плоскости 151
§ 2. Точка и прямая 152
§ 3. Окружность 158
§ 4. Эллипс 160
§ 5. Гипербола 164
§ 6. Парабола 169
§ 7. Общее уравнение кривых второго порядка; его исследование и упрощение 171
§ 8. Показательная кривая 177
§ 9. Синусоидальные кривые 180
§ 10. Циклоидальные кривые 192
§ 11. Развертка круга 207
§ 12. Спирали 208

II. Аналитическая геометрия в пространстве

§ 13. Различные системы координат для определения положения точки в пространстве 213
§ 14. Плоскость 215
§ 15. Прямая линия 218
§ 16. Прямая и плоскость 221
§ 17. Преобразование координат 222
§ 18. Формулы Эйлера 224
§ 19. Поверхности 2-го порядка 226
§ 20. Инверсия 231

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. И. Привалов. Аналитическая геометрия. М. 1938 Л.
2. С. С. Бюшгенс. Аналитическая геометрия. М. 1939 Л.

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Различные системы координат для определения положения точки на плоскости

А. Прямолинейные, или декартовы, координаты

Положение точки M (рис. 101) на плоскости можно определить прямоугольными прямолинейными координатами $x = OA$ и $y = OB$ по

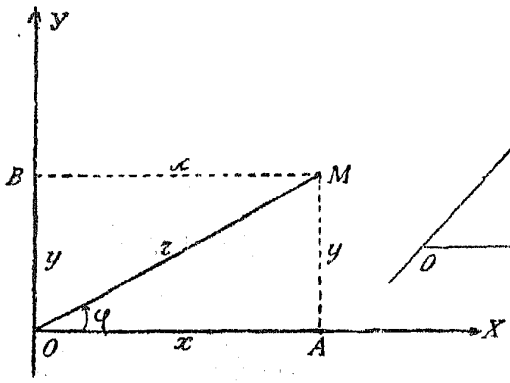


Рис. 101.

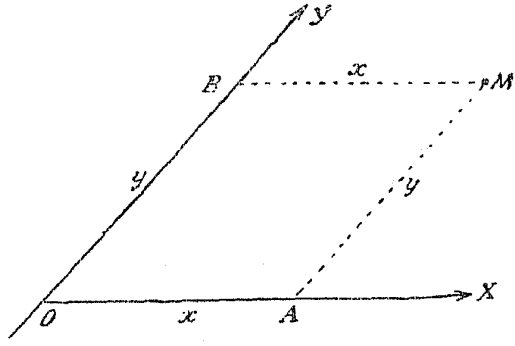


Рис. 102.

отношению осей координат OX и OY. Иногда вместо прямоугольных осей координат применяют косоугольные оси (рис. 102) и тогда координаты точки M будут отрезки $x = OA \parallel BM$ и $y = OB \parallel MA$. Различают две системы координат: в первой системе вращение оси $+OX$ вокруг точки O — начала координат — по направлению к оси $+OY$ кратчайшим образом происходит против часовой стрелки (рис. 101 и 102). В другой системе вращение оси $+OX$ вокруг точки O к оси OY кратчайшим образом происходит по часовой стрелке (рис. 103). Первую систему применяют обычно в аналитической геометрии, а вторую — в геодезии.

Координатные оси разделяют всю плоскость на четыре квадранта или четверти.

Знаки координат x и y в разных четвертях таковы, как показано на рис. 104. При этом условии положение точки на плоскости определяется однозначно.

Б. Полярные координаты

Положение точки M может быть определено полярными координатами: радиусом-вектором $r = OM$ и полярным углом $\varphi = \angle XOM$.

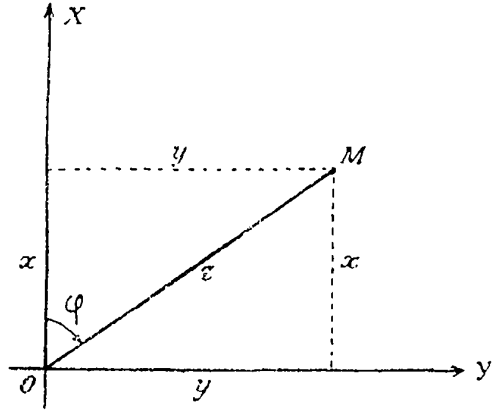


Рис. 103.

Угол φ отсчитывают от положительного направления оси X против часовой стрелки в первой системе (рис. 101), и по часовой стрелке — во второй системе (рис. 103). Угол φ в обоих случаях изменяется от 0 до ∞, а радиус-вектор r, оставаясь положительной величиной, изменяется от 0 до ∞. Если угол φ принимает отрицательные значения, то это означает, что радиус-вектор повернут от оси $+X$ в направлении, обратном принятому счету углов φ.

Зависимость между прямоугольными и полярными координатами:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

или наоборот

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

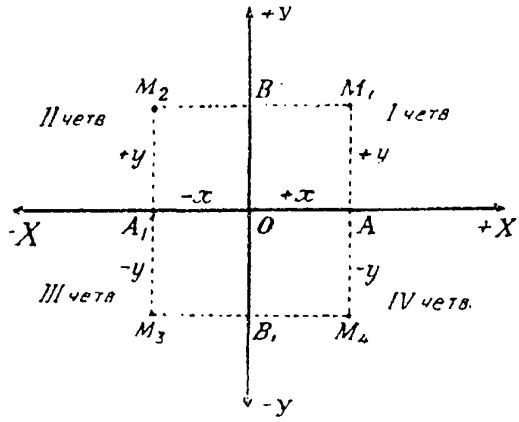


Рис. 104.

Знаки координат x и y определяются знаками $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Наоборот, четверть угла φ, при заданных прямоугольных координатах, определяется знаками x и y, так как по условию r величина существенно положительная.

§ 2. Точка и прямая

1. Расстояние между двумя точками (x_1y_1) и (x_2y_2) (рис. 105)

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega. \qquad (1)$$

Если оси прямоугольные (рис. 106), то

$$\left.\begin{aligned} d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}(M_1M_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ d &= \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

2. Координаты (x, y) точки M (рис. 105 и 106), расстояния которой от данных $M_1(x_1, y_1)$ и M_2 (x_2, y_2) точек находятся в данном отношении $m : n$, т. е.

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\ y &= \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

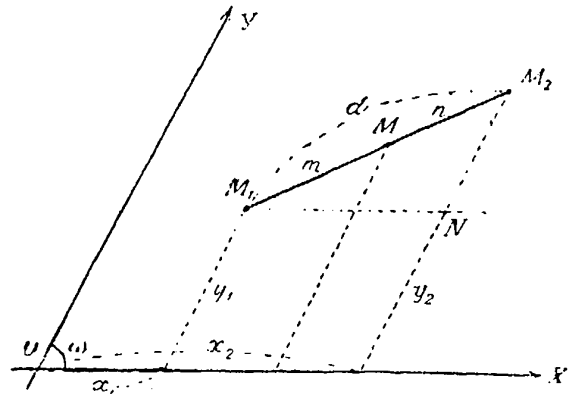


Рис. 105.

Если точка M лежит вне отрезка M_1M_2, то отношение $\frac{m}{n}$ надо считать отрицательной величиной, т. е. приписать ему знак —.

Если обозначить $\frac{m}{n} = \lambda$ ($\lambda > 0$ для положения точки M внутри M_1M_2; $\lambda < 0$ для положения точки M вне M_1M_2), то

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (3)^*$$

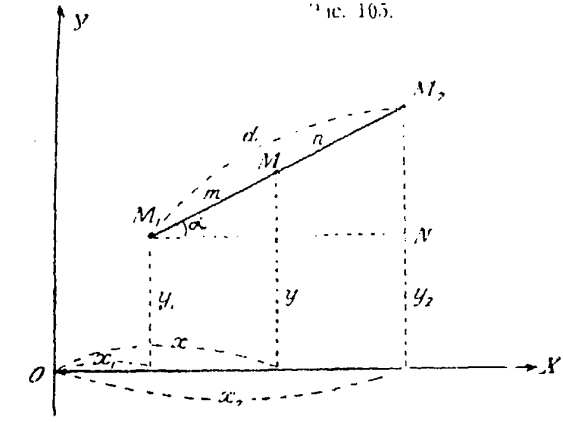


Рис. 106.

3. Преобразование координат (прямоугольные оси координат).

а) Разные начала; оси параллельны (рис. 107).

XOY — прежняя система,
$X'O'Y'$ — новая система,

a и b — координаты нового начала в старой системе.

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

или

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \quad (4)^*$$

б) Одинаковое начало, но разное направление осей (рис. 108).

XOY — прежняя система,
$X'OY'$ — новая система,
α — угол поворота осей.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

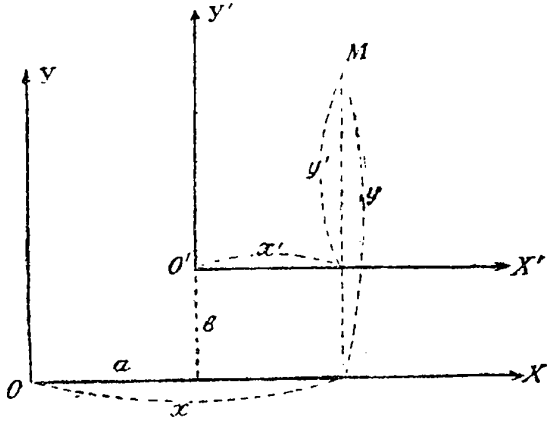


Рис. 107.

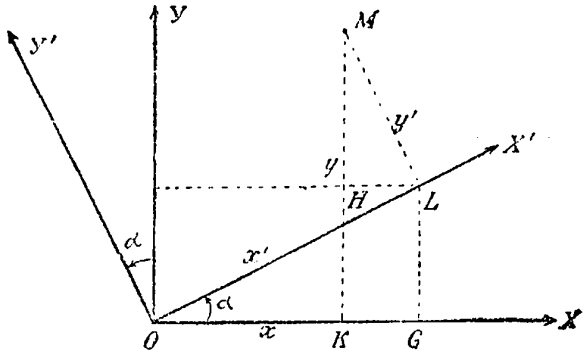


Рис. 108.

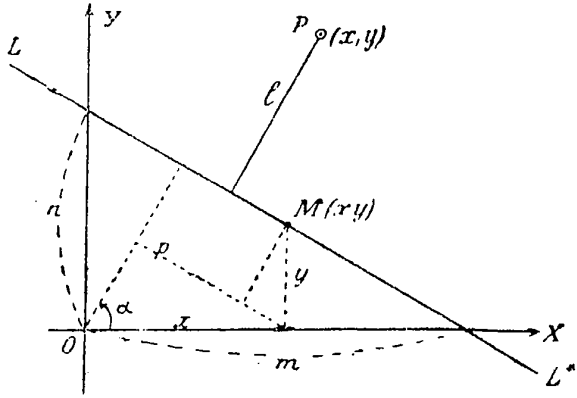


Рис. 109.

или

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (5)^*$$

в) Новое начало и новое направление осей координат.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

или

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (6)^*$$

4. Уравнение прямой линии (рис. 109).

$$\left.\begin{aligned} &Ax + By + C = 0 && (\alpha) \\ &x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \text{ (нормальная форма)} && (\beta) \\ &y = ax + b && (\gamma) \\ &\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 && (\delta) \\ &p = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Знак перед корнем надо взять такой, чтобы величина p была положительная.

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A} = a \quad \text{— угловой коэфициент} \\ &\cos\alpha = \frac{p}{m} \qquad \sin\alpha = \frac{p}{n} \end{aligned}\right\} \quad (7)^*$$

5. Угол φ между двумя прямыми.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ Ax + By + C = 0 \\ &\quad A'x + B'y + C' = 0 \\ &\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'} \\ &\gamma)\ y = ax + b \\ &\quad y = a'x + b' \\ &\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a' - a}{1 + a'a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\beta)\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ &\quad x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' = 0 \\ &\quad \varphi = \alpha' - \alpha \\ &\delta)\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{nm' - mn'}{nn' + mm'} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Условие параллельности двух прямых.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ AB' - BA' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \qquad \beta)\ \alpha' = \alpha \\ &\gamma)\ a = a' \qquad \delta)\ \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Условие перпендикулярности.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ AA' + BB' = 0 \qquad \beta)\ \alpha' = \alpha \pm 90^\circ \\ &\gamma)\ aa' = -1 \qquad \delta)\ \frac{m}{n} = -\frac{n}{m'} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

6. Точка пересечения двух прямых.

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ Ax+By+C=0\\
&\quad A'x+B'y+C'=0\\
&\quad x=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'} \qquad y=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}\\
&\beta)\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\\
&\quad x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'=0\\
&\quad x=\frac{p\sin\alpha'-p'\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}\\
&\quad y=\frac{-p\cos\alpha'+p'\cos\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}\\
&\gamma)\ y=ax+b\\
&\quad y=a'x+b'\\
&\quad x=\frac{b-b'}{a'-a} \qquad y=\frac{a'b-ab'}{a'-a}\\
&\delta)\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1\\
&\quad \frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}=1\\
&\quad x=\frac{n-n'}{\frac{n}{m}-\frac{n'}{m'}} \qquad y=\frac{m-m'}{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

7. Условие пересечения трех прямых в одной точке

$$
\begin{aligned}
Ax+By+C&=0\\
A'x+B'y+C'&=0\\
A''x+B''y+C''&=0
\end{aligned}
$$

состоит в том, чтобы определитель, составленный из коэфициентов равнялся нулю.

$$
\begin{vmatrix}
A, & B, & C\\
A', & B', & C'\\
A'', & B'', & C''
\end{vmatrix}=0 \qquad (12)
$$

8. Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1y_1) и (x_2y_2)

$$
y-y_1=(x-x_1)\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right), \qquad (13)
$$

что можно представить в таком виде:

$$
x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+(x_1y_2-y_1x_2)=0 \qquad (13)^*
$$

или еще в виде равенства нулю следующего определителя

$$
\begin{vmatrix}
x, & y, & 1\\
x_1, & y_1, & 1\\
x_2, & y_2, & 1
\end{vmatrix}=0 \qquad (13)^{**}
$$

9. Условие, чтобы три точки (x_1y_1) (x_2y_2) (x_3y_3) лежали на одной прямой.

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

или

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0. \qquad (14)^*$$

10. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_1y_1) параллельно данной прямой $Ax+By+C=0$ или $y=ax+b$.

$$\left.\begin{aligned} &A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \\ &y-y_1=a(x-x_1)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

11. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_1y_1) перпендикулярно данной прямой $Ax+By+C=0$.

$$\left.\begin{aligned} &B(x-x_1)-A(y-y_1)=0 \\ &y-y_1=\frac{B}{A}(x-x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

12. Расстояние l от точки $P(x_1y_1)$ до прямой, заданной уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ Ax+By+C=0 \\ &l=\pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta)\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \\ &l=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p) \end{aligned}\right\} \qquad (17)^*$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma)\ y=ax+b \\ &l=\pm\frac{y_1-ax_1-b}{\sqrt{1+a^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (17)^{**}$$

Знак величины l отрицательный, когда точка $P(x_1y_1)$ и начало координат расположены по одну сторону прямой, и положительный, когда эти точки находятся по разные стороны прямой, как, например, на рис. 109.

13. Уравнения биссектрис угла между данными прямыми:

$$\begin{aligned} &x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \\ &x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'=0 \end{aligned}$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p\mp(x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p')=0. \qquad (18)$$

Если уравнения прямых заданы в виде:

$$\begin{aligned} &Ax+By+C=0 \\ &A'x+B'y+C'=0, \end{aligned}$$

$$Ax+By+C\mp(A'x+B'y+C')=0. \qquad (18)^*$$

Знак (—) отвечает биссектрисе того угла, в котором находится начало координат.

Уравнения биссектрис можно привести к нормальному виду:

$$x\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')+90^\circ\right]+y\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')+90^\circ\right]-\frac{\frac{1}{2}(p'-p)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}=0 \tag{19}$$

$$x\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')+y\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')-\frac{\frac{1}{2}(p'+p)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}=0. \tag{19*}$$

§ 3. Окружность

Уравнение окружности (α и β координаты центра) (рис. 110).

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2. \tag{20}$$

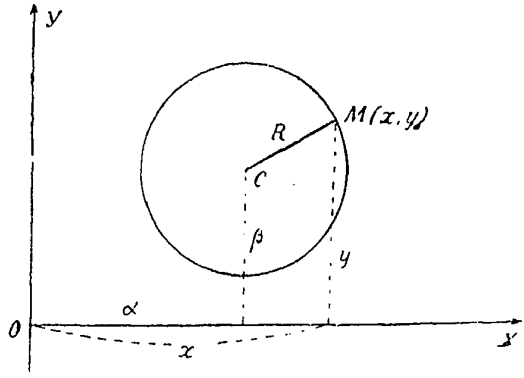


Рис. 110.

Если центр круга в начале координат, то уравнение окружности

$$x^2+y^2=R^2. \tag{20*}$$

Уравнение (20) по раскрытии скобок принимает вид:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0.$$

Сравнивая его с общим уравнением второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

видим, что они имеют одно и то же геометрическое значение, когда

$$\frac{A}{1}=\frac{2B}{0}=\frac{C}{1}=\frac{2D}{-2\alpha}=\frac{2E}{-2\beta}=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2-R^2},$$

т. е. когда

$$\left.\begin{array}{c} A=C \qquad B=0 \\ A\alpha+D=0 \qquad A\beta+E=0 \\ A(\alpha^2+\beta^2-R^2)=F \end{array}\right\} \tag{21}$$

Итак, чтобы уравнение второй степени выражало окружность в прямоугольной системе, необходимо и достаточно, чтобы:

1) коэфициенты при квадратах текущих координат были равны и
2) коэфициент при произведении координат был равен нулю.

При этих условиях центр и радиус выражаемого уравнением круга определяется по его коэфициентам следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{D}{A} \qquad \beta = -\frac{E}{A} \\ R &= \frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Уравнение окружности в полярных координатах.

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) - R^2 = 0,$$

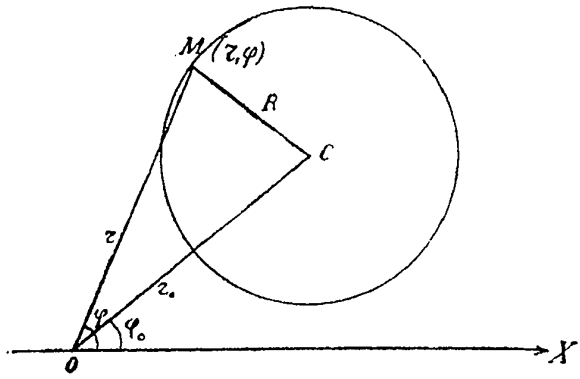


Рис. 111.

r_0 и φ_0 — координаты центра круга (рис. 111).

Если центр лежит на полярной оси, то $\varphi_0 = 0$.

$$r^2 - r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi - R^2 = 0.$$

Если полюс O лежит на окружности, то $r_0 = R$.

$$r - 2R\cos(\varphi-\varphi_0) = 0.$$

Наконец, если центр C лежит в полюсе O, то

$$r = R.$$

Радикальная ось двух окружностей есть прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей; она, очевидно, перпендикулярна к линии, соединяющей центры этих окружностей. Уравнение радикальной оси получается, если из уравнения двух окружностей исключить квадратные члены; тогда получим:

$$2(D_1 - D_2)x + 2(E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0.$$

Радикальная ось есть геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что проведенные из них к обеим окружностям касательные имеют одинаковую длину.

Квадрат длины касательной, проведенной из точки $P(x_1\ y_1)$ к окружности, называется степенью этой точки относительно круга.

Радикальная ось всегда действительная прямая, даже если окружности и не пересекаются. Если окружности касаются, то она будет общей касательной.

Касательная к окружности в точке (x_1y_1).

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=R^2 \tag{23}$$

α и β — координаты центра окружности,

R — радиус окружности.

Если $\alpha=\beta=0$, то $xx_1+yy_1=R^2$. (23)*

Длина касательной t из точки (x_0y_0) к окружности.

$$t=\sqrt{(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2-R^2}. \tag{24}$$

Если уравнение окружности дано в общем виде, то

$$t=\sqrt{x_0^2+y_0^2+\frac{2D}{A}x_0+\frac{2E}{A}y_0+\frac{F}{A}}. \tag{24}*$$

§ 4. Эллипс

1. Уравнение эллипса в канонической форме.

Начало координат в центре эллипса (рис. 112).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Начало координат в точке A_1 (рис. 112).

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2 \tag{2}$$

или

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2, \tag{3}$$

так называемое уравнение, отнесенное к вершине.

Уравнение эллипса в параметрической форме.

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Геометрическое значение угла t см. рис. 113.

Вместо параметра t иногда удобнее взять угол α между нормалью к эллипсу и большой осью (см. рис. 112) и тогда уравнение эллипса в параметрической форме будет такое:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\\ y&=\frac{a(1-e^2)\sin\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\end{aligned}\right\} \tag{4}*$$

Уравнение эллипса в полярных координатах (начало в центре).

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \tag{5}$$

Начало в фокусе

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \tag{6}$$

Полупараметр F_1O

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \tag{7}$$

$$c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{8}$$

2. Свойства эллипса. $$r_1 + r_2 = 2a \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a - ex \\ r_2 &= a + ex \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

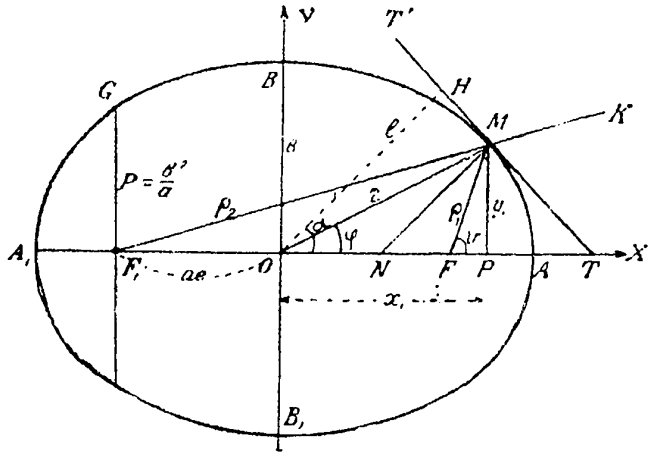


Рис. 112.

3. Касательная и нормаль к эллипсу в точке $(x_1 y_1)$ (рис. 112) x и y — текущие координаты касательной или нормали.

Уравнение касательной $T'MT$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Уравнение нормали MN

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 e^2. \tag{12}$$

Касательная и нормаль к эллипсу делят пополам соответственно внешний и внутренний углы между радиусами-векторами, проведенными к данной точке, т. е.

$$T'MF = T'MF_1 \text{ и } \angle FMN = \angle NMF_1$$

$$ON = e^2 x_1 \tag{13}$$

$$OT = \frac{a^2}{x_1} \tag{14}$$

$$ON \cdot OT = a^2 e^2 = a^2 - b^2. \tag{15}$$

Поднормаль $PN = S_n = \frac{b^2}{a^2} x_1 = x_1 (1 - e^2)$. (16)

Подкасательная $PT = S_t = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$. (17)

Длина l перпендикуляра OH из центра эллипса на касательную TT'

$$l = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} \tag{18}$$

или

$$l^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \tag{18}^*$$

где α — угол между большой полуосью и направлением перпендикуляра OH, т. е. нормали MN.

Геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются эллипса, есть окружность, центр которой находится в центре эллипса, а радиус равен $\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Площадь $\Sigma = OBMP = \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} ab \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)$. (19)

Площадь эллипса $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$. (20)

Радиус кривизны $R = \frac{(a^2 - e^2 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - e^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$, (21)

где t — параметр [см. уравнение (4)].

Если параметром взять угол α (рис. 112), то радиус кривизны R примет такую форму:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}. \tag{21}^*$$

Длина окружности эллипса

$$L = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5}\right] - \dots \tag{22}$$

или

$$L = \pi(a + b)\left[1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \frac{25n^8}{16384} + \dots\right], \tag{23}$$

где

$$n = \frac{a - b}{a + b}.$$

Длина дуги эллипса в функции разности углов α_2 и α_1

$$L_{\alpha_1}^{\alpha_2} = a(1 - e^2)\left[\left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \dots\right)(\alpha_2 - \alpha_1) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{3}{4} e^2 + \dots\right) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1) \dots\right], \tag{23}^*$$

где α_1 и α_2 — углы между большой полуосью и направлениями нормалей в конечных точках дуги.

За длину окружности эллипса приближенно можно принять длину окружности круга, радиус которого r равен:

$$r = \frac{3}{2} \frac{a + b}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{ab}. \tag{24}$$

5. Построение эллипса по точкам.

1) Описывают две концентрические окружности радиусами a и b. Через центр O проводят радиус OE под произвольным углом t

к оси OA и через точки C и D пересечения его с окружностями проводят линии, параллельные осям координат. Точка M пересечения указанных линий принадлежит эллипсу (рис. 113).

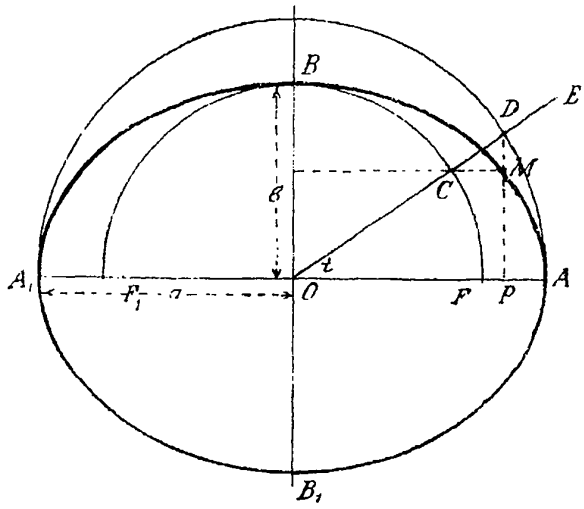


Рис. 113.

Поэтому ордината $PD=Y$ круга радиуса a и ордината $PM=y$ эллипса для того же значения $x=OP$ относятся, как полуоси эллипса a и b или

$$\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}. \qquad (25)$$

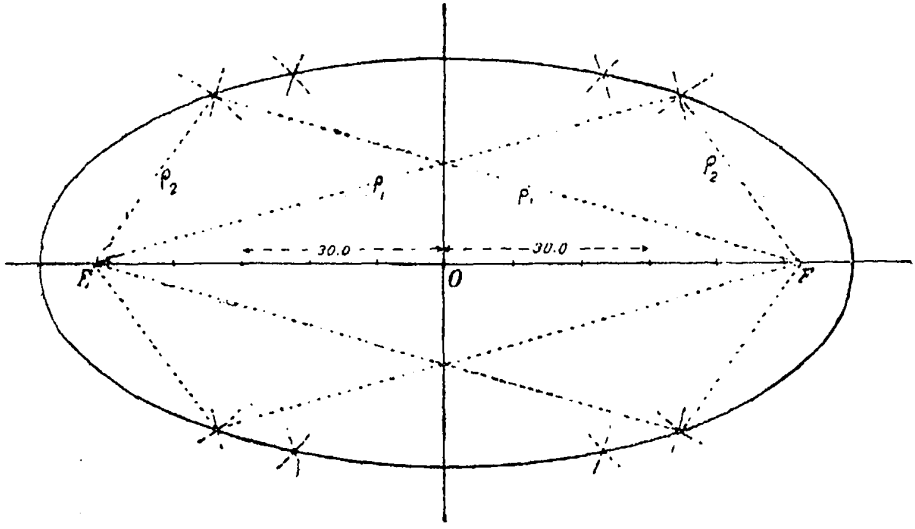


Рис. 114.

2) Пользуясь тем свойством эллипса, что сумма радиусов-векторов $\rho_1+\rho_2=2a$, построение эллипса по точкам выполняется таким образом: из фокуса F описывают дугу радиусом $\rho_1<2a$ и засекают эту

дугу радиусом $\rho_2 = 2a - \rho_1$, проводя окружность из другого фокуса F_1. Потом, наоборот, проводят окружность радиусом ρ_1 из фокуса F_1 и засекают эту окружность дугой радиуса $\rho_2 = 2a - \rho_1$ приняв фокус F за центр (рис. 114).

3) Пользуясь уравнением эллипса в параметрической форме (4), построение его по точкам помощью таблиц Р. Ш. и Отш. выполняется таким образом проще всего.

Так как $x = a\cos t =$ Р. Ш. (a — плавание, t — курс),

$y = b\sin t =$ Отш. (b — плавание, t — курс),

то, задавая угол t через 5° или 10°, выбирают из таблицы № 34 Мореходных таблиц 1943 г. величины x и y без вычислений. Применяя миллиметровую бумагу, построение выполняют очень точно.

На рис. 114 построен эллипс указанным способом при заданных $a = 60$ *мм*, $b = 30$ *мм*. Угол t изменяли через 10°.

t	$a = 60$ *мм* $x =$ Р. Ш.	$b = 30$ *мм* $y =$ Отш.
0°	60,0	0,0
10	59,1	5,2
20	56,4	10,3
30	52,0	15,0
40	46,0	19,3
50	38,6	23,0
60	30,0	26,0
70	20,5	28,2
80	10,4	29,5
90	0,0	30,0

§ 5. Гипербола

1. Уравнение гиперболы в канонической форме (рис. 115).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Уравнение гиперболы, отнесенное к вершине A и главной оси.

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2. \tag{2}$$

Уравнение гиперболы в параметрической форме.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sec\vartheta = a\,\mathrm{ch}\,u \\ y &= b\,\mathrm{tg}\,\vartheta = b\,\mathrm{sh}\,u \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Геометрическое значение угла ϑ (рис. 117) и значение параметра u см. ниже.

Символы ch и sh означают гиперболические косинус и синус (см. отдел II, глава 4).

Уравнение гиперболы в полярных координатах (начало в центре).

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}; \tag{4}$$

угол $\varphi = MOA$ (рис. 117). Зависимость между углами φ и θ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\sin\theta = \operatorname{tg}\psi\sin\theta, \tag{5}$$

где ψ — угол между асимптотами и действительной осью.

Вследствие уравнений (3) имеем:

$$r^2 = a^2\sec^2\theta + b^2\operatorname{tg}^2\theta. \tag{6}$$

Для вычислений удобнее представить (6) в таком виде:

$$r^2 = \frac{c^2}{2}(1 + 2\operatorname{tg}^2\theta) + \frac{a^2 - b^2}{2}, \tag{7}$$

где

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

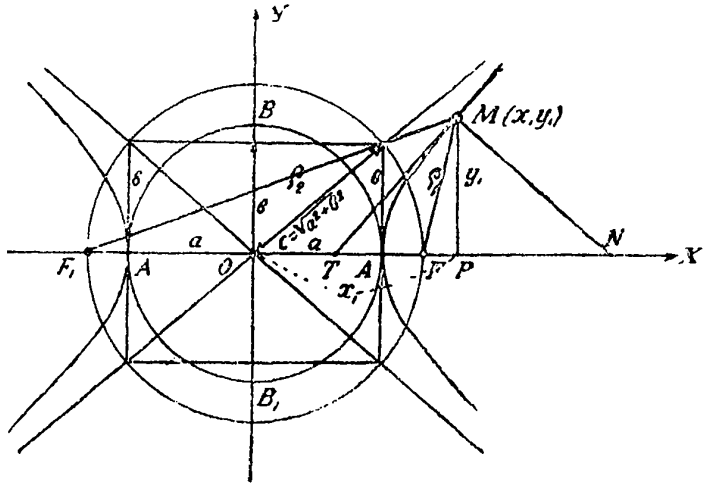


Рис. 115.

Геометрическое значение параметра θ следующее (рис. 117): точку M на гиперболе можно найти таким построением. Опишем окружности радиусами a и b, приняв точку O за центр; через точку O проведем прямую ONE под углом θ к оси X и заметим точку N. Через точку N проведем касательную NL к окружности радиуса a и через точку L проведем ординату; заметим точку D пересечения окружности радиуса b с осью X и, проведя ординату DE, найдем, что отрезок DE равен ординате гиперболы; проведя через точку E прямую, параллельную оси X, увидим, что точка M принадлежит гиперболе.

Уравнение гиперболы можно представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{a}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \\ y &= \pm\frac{b}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где w — некоторый переменный параметр, причем $w > 1$.

Зависимость между параметрами w, u и θ выражается следующим образом:

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = e^u \tag{9}$$

или

$$\ln w = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = u.$$

Координаты сопряженной гиперболы получаются для тех же значений w по формулам:

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \\ x &= \pm \frac{a}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

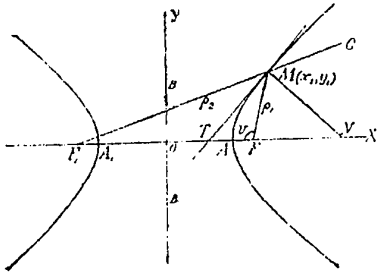


Рис. 116.

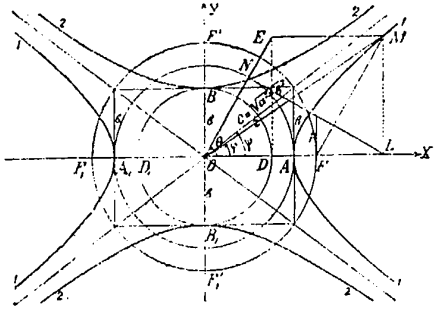


Рис. 117.

Уравнение гиперболы в полярных координатах. Начало координат в фокусе F; v — угол между радиусом-вектором r и полярной осью.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \tag{11}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1) \tag{12}$$

угол v (рис. 116), p — полупараметр гиперболы, т. е. ордината, проходящая через фокус.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a} \text{ эксцентриситет гиперболы.} \tag{13}$$

2. Свойства гиперболы:

$$c^2 = OF^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho_2 - \rho_1 = 2a \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 &= ex + a \\ \rho_1 &= ex - a \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3. Сопряженные гиперболы (рис. 117):

$$\left.\begin{aligned} &\text{(1-я)} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\text{(2-я)} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

4. Уравнения асимптот

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{17}$$

Уравнение гиперболы, отнесенное к асимптотам, как к осям косоугольных координат,

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}. \tag{18}$$

Равнобокая гипербола ($a = b$)

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2 \text{ — уравнение относительно осей} \\ xy &= \frac{a^2}{2} \text{ — уравнение относительно асимптот} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

5. Касательная и нормаль к гиперболе в точке $(x_1 y_1)$ (рис. 115).

Уравнение касательной MT $\quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$ (20)

Уравнение нормали MN $\quad \frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 e^2.$ (21)

$$OT = \frac{a^2}{x_1}; \quad ON = e^2 x_1; \tag{22}$$

$$OT \cdot ON = a^2 e^2 = a^2 + b^2 = c^2. \tag{23}$$

Касательная и нормаль к гиперболе делят пополам внутренний и внешний углы между радиусами-векторами, проведенными к точке касания (рис. 116), т. е. угол $F_1MT = TMF$ и $GMN = NMF$.

Подкасательная $S_t = TP = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}.$ (24)

Поднормаль $S_n = PN = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$ (25)

Площадь гиперболы $AMP = S$ (рис. 115).

$$S = \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} ab \ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) = \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} ab \operatorname{Ar\,ch}\left(\frac{x_1}{a}\right). \tag{26}$$

Площадь гиперболического сектора $OMA = \frac{1}{2} u$, где

$$u = ab \ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) = ab \operatorname{Ar\,ch}\left(\frac{x_1}{a}\right). \tag{27}$$

Радиус кривизны R в точке $(x_1 y_1)$

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\left[\left(\frac{b}{a} x_1\right)^2 + \left(\frac{a}{b} y_1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{ab} =$$

$$= \frac{(e^2 x_1^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^3}{b} (e^2 \sec^2 t - 1)^{\frac{3}{2}}. \tag{28}$$

Построение гиперболы

1. По расстояниям. Основное определение гиперболы: разность радиусов-векторов есть величина постоянная, равная действительной оси гиперболы $2a$, позволяет просто строить гиперболу.

Приняв точку F за центр, описываем дуги окружностей ρ_1 и засекаем их дугами радиусами $\rho_2 = \rho_1 + 2a$ из другого фокуса F_1. Точки пересечений соответствующих дуг определят правую ветвь гиперболы; для построения левой ветви надо фокус F_1 принять за центр и описать дуги радиусами ρ_1 и засечь их дугами радиусов ρ_2, описанными из другого фокуса F (см. рис. 116).

2. По координатам (по точкам). а) Давая величине w в формуле (8) ряд значений, например, 1, 1,5, 2, ... 4, легко найти координаты x и y и нанести по координатам эти точки. Соединив их плавной кривой, получим гиперболу (рис. 117), для которой $a = 13{,}3$ *мм*, $b = 10{,}0$ *мм* и $c = 16{,}7$ *мм*.

$$a = 13{,}3 \text{ мм} \qquad b = 10 \text{ мм}$$

w	$\frac{1}{w}$	$\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$	$\frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)$	x	y
1	1,0	1,0	0,0	13,3 *мм*	0,0 *мм*
1,5	0,6667	1,0333	0,4167	14,4	4,2
2	0,5	1,25	0,75	16,7	7,5
2,5	0,4	1,45	1,05	19,3	10,5
3	0,3333	1,6667	1,3334	22,2	13,3
3,5	0,2857	1,8929	1,6172	25,2	16,2
4	0,25	2,125	1,875	28,3	18,8

Умножая $\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ на $b = 10$ *мм*, а $\frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)$ на $a = 13{,}3$ *мм*, получим координаты сопряженной гиперболы.

б) Пользуясь выражением (9), координаты точек гиперболы можно вычислять, применяя натуральные величины тригонометрических функций.

Обозначая для краткости

$$\left.\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{\theta}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \tfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ B &= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{\theta}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \tfrac{\theta}{2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

получим координаты точек основной гиперболы

$$\left.\begin{aligned} x &= aA \\ y &= bB \end{aligned}\right\} \qquad (29)^*$$

а для координат сопряженной

$$\left.\begin{aligned} y &= aB \\ x &= bA \end{aligned}\right\} \qquad (29)^{**}$$

Для вычисления величин A и B достаточно t изменять через 10°.

3. Координаты точек гиперболы легко вычислять, пользуясь ее уравнением в параметрической форме (3)

$$x = a \sec\theta$$
$$y = b \operatorname{tg}\theta.$$

Вместо вычислений по этим формулам можно прямо воспользоваться Мореходными таблицами таким образом: если полуось a

принимать за отшествие, а угол θ за среднюю широту, то в графе PD получим абсциссу x без интерполяции; если мнимую полуось b принять за Р. Ш., а угол θ за курс, то в графе Отш. найдем соответствующую ординату y. Выборка последней требует наибольшей интерполяции, которую часто можно делать на глаз.

Если гиперболу надо строить в крупном масштабе, то формулы (29) и (29)* наиболее удобны; применяя арифмометр, координаты x и y можно вычислить скоро.

§ 6. Парабола

Уравнение параболы в канонической форме (рис. 118)

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Начало координат O в вершине параболы, а ось совпадает с осью X.

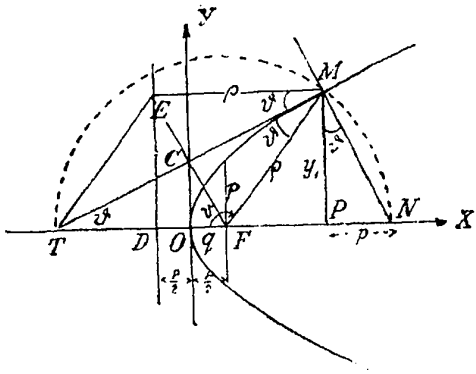


Рис. 118.

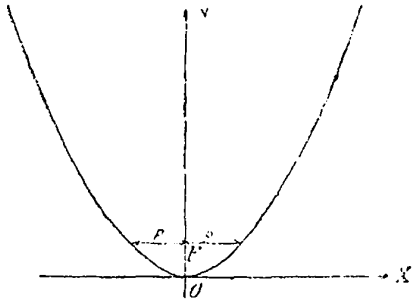


Рис. 119.

Уравнение параболы в полярных координатах

$$\rho = \frac{p}{1+\cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}} \Bigg| \tag{2}$$

$$q = \frac{p}{2} = FO.$$

Оно получается из соответствующего уравнения эллипса и гиперболы, если положить в них эксцентриситет $e = 1$.

Образование параболы — расстояние ρ любой точки M от фокуса F равно расстоянию ее до прямой ED, называемой директрисой.

Уравнение параболы, осью которой служит ось Y, имеет вид (рис. 119):

$$x^2 = 2py. \tag{3}$$

Эксцентриситет e параболы равен 1.

1. Касательная и нормаль в точке $(x_1 y_1)$ (рис. 118).

Касательная MT составляет с осью X угол $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{y_1}$.

Уравнение касательной MT $\quad yy_1 = p(x + x_1).$ (4)

Уравнение нормали MN $\quad y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$ (5)

Поднормаль $S_n = PN = p.$ (6)

Подкасательная $S_t = PT = 2x_1.$ (7)

Касательная к параболе в точке M составляет равные углы β с осью кривой OX и радиусом-вектором FM в точке касания (рис. 118).

2. Радиус кривизны R в точке $(x_1 y_1)$

$$R = \frac{(2x_1 + p)^{3/2}}{\sqrt{p}}. \tag{8}$$

Площадь $OMP = S$

$$S = \frac{2}{3} x_1 y_1. \tag{9}$$

Длина дуги $OM = s$

$$s = \frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x_1}{p}\left(1 + \frac{2x_1}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x_1}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x_1}{p}}\right)\right\} \tag{10}$$

или

$$s = \frac{1}{2} p\left\{\frac{y_1}{p^2}\sqrt{p^2 + y_1^2} + \ln\frac{y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}}{p}\right\} \tag{11}$$

Построение параболы

1. Уравнение параболы можно написать:

$$\frac{2p}{y} = \frac{y}{x},$$

т. е. ордината $y = PM$ есть средняя пропорциональная между величиной $2p$ и абсциссой точки M. Поэтому от вершины O (рис. 120) по оси в левую сторону откладываем $2p = OG$. Через точку G проводим линии GK_1, GK_2, GK_3 и через точки K_1, K_2, K_3 пересечения этих лучей с осью Y-ов проводим перпендикуляры K_1P_1, K_2P_2, K_3P_3.

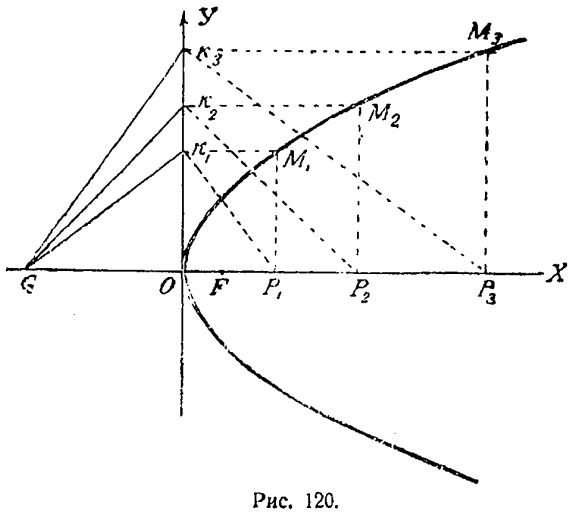


Рис. 120.

Точки P_1, P_2, P_3 будут абсциссы параболы; через K_1, K_2, K_3 и P_1, P_2, P_3 проводим координатные линии и получаем точки M_1, M_2, M_3, принадлежащие параболе.

2. От вершины O откладываем по n равных частей по оси Y-ов

до B и B_1; от точек B и B_1 по направлению оси X-ов откладываем по n равных частей (можно другой величины) и соединяем вершину со всеми делениями 1, 2, ..., 7, идущими по горизонтальному направлению (рис. 121); через соответственные деления на оси Y-ов проводим прямые параллельные оси X-ов.

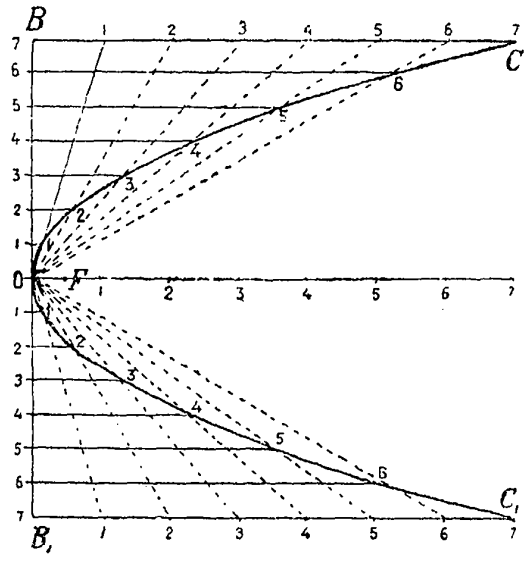


Рис. 121.

В пересечениях 1, 2, 3, .., 6 указанных линий получаем точки, принадлежащие параболе. Если размеры $OB=h$ и $BC=b$ заданы заранее, то делим их на произвольное и равное число частей, а дальше поступаем, как сказано выше. Параметр p параболы определится из выражения:

$$p=\frac{h^2}{2b} \qquad (12)$$

Если, наоборот, задан параметр p, то сначала по формуле (12) находим h или b по заданной величине одной из них, а дальше поступаем, как сказано.

§ 7. Общее уравнение кривых второго порядка; его исследование и упрощение

Общее уравнение *)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Координаты центра определяются из выражений:

$$Ax_0+By_0+D=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0.$$
$$Bx_0+Cy_0+E=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0.$$

Здесь буквой Φ обозначена левая часть общего уравнения (1). Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{EB-DC}{AC-B^2}\\ y_0&=\frac{DB-AE}{AC-B^2}\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Координаты центра имеют конечные значения, если $AC-B^2\neq 0$ (эллипс или гипербола); в противном случае кривая будет парабола.

*) В большинстве современных руководств и учебников по аналитической геометрии общее уравнение кривых 2-го порядка пишут именно в таком виде, тогда формулы получаются несколько более симметричные, чем в случае общего уравнения в такой форме:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

$AC - B^2 \neq 0$.

Уравнение кривой второго порядка, отнесенное к центру при прежнем направлении осей, имеет вид:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2} = 0, \tag{2}$$

где

$$\Delta = ACF + 2BED - AE^2 - CD^2 - FB^2 \tag{3}$$

называют дискриминантом.

Если дискриминант $\Delta = 0$, то уравнение (2) изображает две прямые, действительные, мнимые, пересекающиеся, параллельные или совпадающие.

Дискриминант Δ равен определителю 3-го порядка, составленному из коэфициентов данного уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, B, D \\ B, C, E \\ D, E, F \end{vmatrix} \tag{3}^*$$

Таким образом, при переносе начала координат в центр кривой 2-го порядка совокупность трех членов второго измерения в уравнении (1) остается без изменения; члены первого измерения исчезают, а свободный член $\Delta : (AC - B^2)$ представляет собой результат подстановки в левую часть уравнения координат центра вместо текущих координат.

Дальнейшее упрощение состоит в повороте осей X_1, Y_1 на угол α, определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

При таком выборе направления новых осей X_2, Y_2 уравнение (2) принимает следующий простейший вид:

$$k_1x_2^2 + k_2y_2^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2} = 0, \tag{4}$$

где k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения

$$k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0. \tag{5}$$

Как видно из (4), оси OX_2 и OY_2 суть оси симметрии кривой, кратко называемые и просто осями кривой. При повороте осей X_1Y_1 вокруг центра кривой выражения $A + C$ и $AC - B^2$, составленные из коэфициентов данного уравнения, не изменяются. Поэтому их называют инвариантами кривой 2-го порядка (по латыни variare — изменяться; in — отрицание).

Таким образом, чтобы составить простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка, если $AC - B^2 \neq 0$, нужно:

1) Найти координаты x_0, y_0 центра кривой из системы уравнений:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0, \end{aligned}$$

2) Вычислить определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, B, D \\ B, C, E \\ D, E, F \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A, B \\ B, C \end{vmatrix}$$

3) Найти корни k_1 и k_2 квадратного уравнения

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0.$$

4) Упрощенное уравнение примет вид:

$$k_1x_2^2+k_2y_2^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Пример. Упростить уравнение

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

Здесь

$$A=+1;\ B=-\frac{1}{2};\ C=+1;\ D=1;\ E=-2;\ F=0.$$

Поэтому $AC-B^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$, т. е. линия имеет центр.

Координаты центра найдутся из системы уравнений

$$\begin{aligned}2x-y+2&=0\\-x+2y-4&=0,\end{aligned}$$

а именно: $x_0=0;\quad y_0=+2.$

Составляем квадратное уравнение (5)

$$k^2+2k+\frac{3}{4}=0,$$

корни которого

$$k_1=1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2};\quad k_2=1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}.$$

Дискриминант Δ равен

$$\Delta=+2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-1\cdot4-1\cdot1=-3,$$

поэтому простейшее уравнение кривой 2-го порядка, отнесенное к центру и осям, будет

$$\frac{1}{2}x_2^2+\frac{3}{2}y_2^2-\frac{3}{\frac{3}{4}}=0$$

или

$$x_2^2+3y_2^2-8=0.$$

А. Исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка

1. $AC-B^2>0$, корни k_1 и k_2 одного знака и положительны

$$(k_1<k_2).$$

а) $\Delta>0$ — мнимое место точек;
б) $\Delta=0$ — одна точка $(x_2=y_2=0)$;
в) $\Delta<0$ — эллипс, у которого

$$a^2=-\frac{\Delta}{\delta k_1}>0;\quad b^2=-\frac{\Delta}{\delta k_2}>0.$$

2. $AC-B^2<0$, корни k_1 и k_2 разных знаков ($k_1>0$ и $k_2<0$).

а) $\Delta>0$ — гипербола, действительная ось которой совпадает с осью OX; $a^2=-\frac{\Delta}{\delta k_1}$; $b^2=\frac{\Delta}{\delta k_2}$;

б) $\Delta=0$ — две прямые линии, проходящие через начало координат;

в) $\Delta<0$ — гипербола, действительная ось которой совпадает с осью OY; $a^2=\frac{\Delta}{\delta k_1}$; $b^2=-\frac{\Delta}{\delta k_2}$.

Б. Главные диаметры центральной линии 2-го порядка

Уравнение диаметра, принимаемого за ось X_2

$$y-y_0=\frac{B}{k_1-C}(x-x_0). \tag{6}$$

Уравнение диаметра, принимаемого за ось Y_2,

$$y-y_0=\frac{B}{k_2-C}(x-x_0). \tag{6*}$$

k_1 и k_2 — корни уравнения (5).

Уравнения относятся к основной системе координат (XY).

Эксцентриситет e кривых 2-го порядка, заданных уравнением

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

$$e=\sqrt{\frac{A-C}{A}}=\sqrt{1-\frac{C}{A}}\ \text{(эллипс)}$$

$$e=\sqrt{\frac{\pm A\mp C}{C}}\ \text{(гипербола, действительная ось} \parallel \text{оси } OX)$$

$$e=\sqrt{\frac{\pm A\mp C}{A}}\ \text{(гипербола, действительная ось} \parallel \text{оси } OY).$$

$AC-B^2=0$.

В этом случае общее уравнение кривой 2-го порядка

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

принимает вид:

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{7}$$

т. е. если $AC-B^2=0$, то трехчлен второй степени уравнения (1) представляет точный квадрат двучлена $\alpha x+\beta y$

$$\alpha^2=A;\ \beta^2=C;\quad B=\alpha\beta.$$

1. Повернув первоначальные оси координат на угол

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{8}$$

и перенеся начало координат в точку x_0y_0, получим уравнение параболы в простейшем виде, отнесенное к вершине и главной оси, принимаемой за положительное направление оси X_2,

$$y_2^2=2px_2, \tag{9}$$

где

$$p=\frac{\alpha E-\beta D}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}} \tag{10}$$

при условии, что $\beta D - \alpha E \neq 0$. Это уравнение (1) представляет собой действительно параболу. Уравнение главного диаметра (оси X_2) в начальных координатах будет:

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha D + \beta E}{\alpha^2 + \beta^2} = 0. \qquad (11)$$

Координаты x_0 y_0 (в начальной системе) вершины параболы определятся решением уравнений (7), (11).

2. Если же $\beta D - \alpha E = 0$, то уравнение (1) представляет собой две параллельные прямые действительные, различные или совпадающие, или же две мнимые прямые.

В коэфициентах основного уравнения эти результаты можно формулировать так:

если определитель $\delta = AC - B^2 = 0$, то:

1) если определитель $\Delta \neq 0$ — уравнение (1) представляет параболу;

2) если же определитель $\Delta = 0$ — уравнение (1) представляет собой две параллельные прямые (мнимые, действительные или совпадающие).

Пример. Упростить уравнение:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0 \qquad (*)$$

или

$$(x + y)^2 + 2x + y = 0.$$

Здесь $\alpha = 1$; $\beta = 1$; $D = 1$; $E = \frac{1}{2}$.

Уравнение главного диаметра $x + y + \frac{3}{4} = 0$.

Совместное решение с уравнением $(x + y)^2 + 2x + y = 0$ дает $x_0 = \frac{3}{16}$; $y_0 = -\frac{15}{16}$ — координаты вершин параболы.

Полупараметр

$$p = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1}{(1^2 + 1^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

и уравнение параболы, отнесенной к вершине и главной оси, будет:

$$y_2^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} x_2.$$

Исследование уравнения (*).

$$\text{Определитель } \delta = \begin{vmatrix} A, B \\ B, C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 1 = 0$$

$$\text{Определитель } \Delta = \begin{vmatrix} A, B, D \\ B, C, E \\ D, E, F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, 1, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{1}{2}, 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то кривая — парабола.

В. Диаметры кривых 2-го порядка. Свойства их. Сопряженные диаметры

1. Центральные кривые. Прямая M_1OM (рис. 122), проходящая через центр кривой O, называется диаметром. Диаметр, проходящий через середины параллельных хорд, называется сопряженным с данными хордами.

Если $y = kx + a$ есть уравнение одной из хорд FG, имеющих угловой коэфициент k, то уравнение сопряженного диаметра MM_1 будет:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{k}. \qquad (12)$$

Знак — отвечает эллипсу, знак + гиперболе; значит, угловой коэфициент k' сопряженного диаметра равен:

$$k' = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{k}. \qquad (13)$$

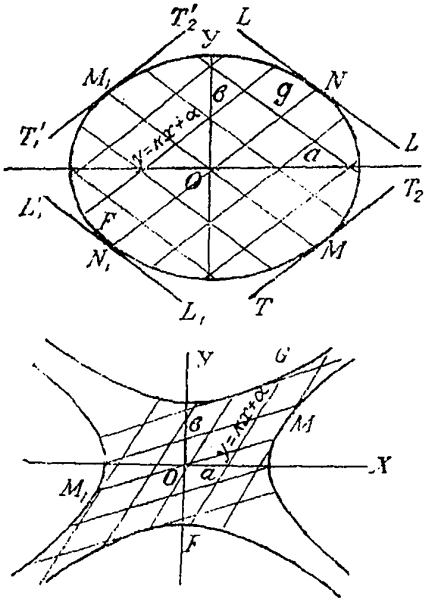


Рис. 122.

Отсюда $k \cdot k' = \mp \frac{b^2}{a^2}$. Значит, сопряженность направлений k и k' есть свойство взаимное: если один диаметр делит пополам хорды, параллельные второму диаметру, то второй диаметр делит пополам хорды, параллельные первому. Такие диаметры называются сопряженными (MM_1 и NN_1). Касательные $T_1 T_2$, проведенные через конец одного сопряженного диаметра, параллельны другому сопряженному диаметру NN_1. Если k_1 и k_2 будут угловые коэфициенты сопряженных диаметров, или $\frac{b^2}{a^2} : k_2$ и $\frac{b^2}{a^2} : k_1$ — угловые коэфициенты соответствующих хорд, то

$$k_1 k_2 = \mp \frac{b^2}{a^2}. \qquad (14)$$

Отсюда видно, что если один из диаметров эллипса составляет с положительным направлением большой оси острый угол ($k_1 > 0$), то другой сопряженный диаметр с той же осью составляет тупой угол ($k_2 < 0$).

У гиперболы, наоборот, сопряженные диаметры составляют одновременно или острые, или тупые углы с действительной осью (рис. 122).

Это свойство сопряженных диаметров можно формулировать еще и так: большая полуось эллипса лежит в остром углу, а малая в тупом углу между любыми двумя сопряженными диаметрами. Обе оси гиперболы лежат в тупом углу между сопряженными диаметрами.

2. Теоремы Аполлония (III в. до н. э.). Главные оси связаны с сопряженными диаметрами такими соотношениями, известными под названием теорем Аполлония:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^2 + n^2 \\ ab &= mn \sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Эти соотношения позволяют найти полуоси a и b, когда заданы сопряженные полудиаметры m и n и угол θ между ними.

Очевидно:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin\theta} \\ a - b &= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\sin\theta} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

3. Парабола. У параболы центр удален в бесконечность, и если $y=kx+\alpha$ есть уравнение параллельных хорд, то сопряженный с ними диаметр имеет уравнение

$$y=\frac{2p}{k},$$

т. е. все диаметры, сопряженные с хордами всех направлений, параллельны главной оси.

Г. Построение главных полуосей эллипса по заданным сопряженным полудиаметрам

Пусть $OM=m$ и $ON=n$ (рис. 123) сопряженные полудиаметры, заданные по величине и направлению, и положим $m>n$. Через конец M большего полудиаметра m проведем прямую перпендикулярно к направлению другого полудиаметра ON. На этой линии от точки M отложим отрезки $DM=ME=n$ и соединим точки D и E с центром эллипса O; тогда

$$OD=a+b \quad \text{и} \quad OE=a-b,$$

т. е. одна сторона есть сумма главных полуосей, а другая разность их. Нахождение отдельно a и b не представляет затруднений. Направлена большая ось будет по биссектрисе OA острого угла DOE, между сопряженными диаметрами. Имея направления и величины главных осей, построение эллипса делаем одним из указанных выше приемов.

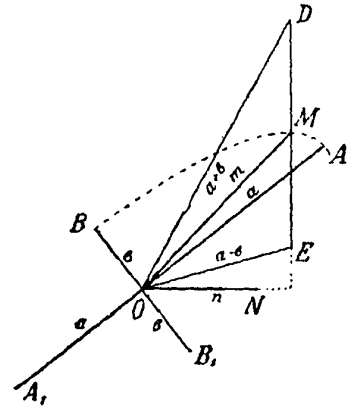


Рис. 123.

Уравнения эллипса и гиперболы, отнесенные к сопряженным диаметрам m и n, имеют вид:

$$\frac{\xi^2}{m^2}\pm\frac{\eta^2}{n^2}=1,$$

где ξ и η — косоугольные координаты, направление осей которых совпадает с сопряженными диаметрами.

§ 8. Показательная кривая

Так называется кривая, имеющая уравнение

$$y=a^x. \tag{1}$$

Обычно основанием служит число $e=2{,}71828\ldots$ (основание натуральных логарифмов), тогда

$$y=e^x. \tag{2}$$

Построение показательной кривой можно делать помощью приведенной краткой таблицы величин e^x. Из этой таблицы или из рис. 124 легко видеть, что вследствие быстрого возрастания величины $y=e^x$, при увеличении аргумента x, сохранять одинаковый масштаб по осям x и y неудобно.

Линия, ординаты которой показаны пунктиром на рис. 124, представляет кривую

$$y_1=e^{-x}, \tag{3}$$

симметричную кривой *1*.

Кривая 3, ординаты которой равны полусумме ординат y и y_1, представляет собой цепную линию, уравнение которой

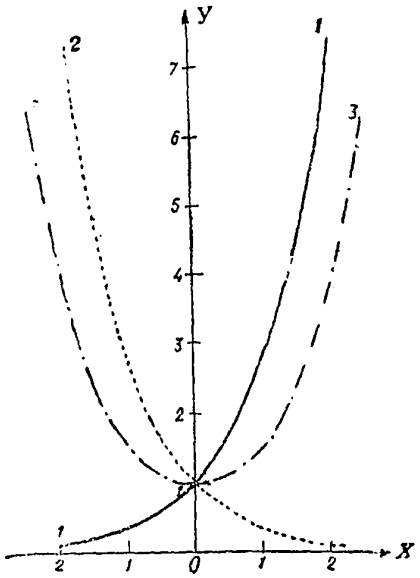


Рис. 124.

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) \qquad (4)$$

при параметре h, равном единице.

Показатель степени e в уравнении (2) обычно входит с некоторым

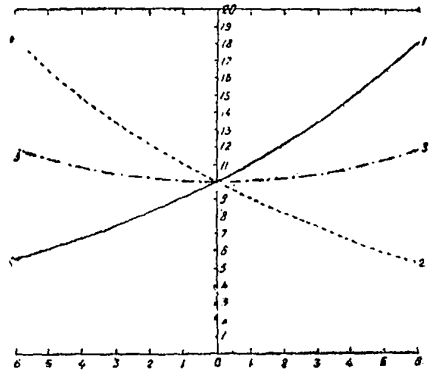


Рис. 125.

множителем m, который играет роль постоянного параметра в рассматриваемом вопросе; иногда еще бывает некоторый множитель A перед e^{mx}, так что наиболее общее выражение для уравнения показательной кривой можно написать:

$$y = Ae^{mx}. \qquad (5)$$

График кривой *1* при значениях $A = 10$, $m = +0{,}1$ показан на рис. 125. Если параметр m будет величина отрицательная и равная $-0{,}1$, то кривая будет, очевидно, симметрична кривой *1* относительно оси Y; на рис. 125 эта кривая *2* показана пунктиром и уравнение ее будет:

$$y = Ae^{-mx}. \qquad (5)^*$$

Кривая *3*, построенная по полусуммам соответственных ординат (5) и (5)*,

$$y = \frac{10}{2}\left(e^{+0{,}1x} + e^{-0{,}1x}\right) \qquad (6)$$

представит цепную линию, параметр которой равен 10.

Построение показательной кривой $y = Ae^{mx}$ можно делать графически следующим приемом (рис. 126).

Ординаты

$$y_{-3};\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,$$

соответствующие абсциссам

$$x = -3\alpha,\ -2\alpha,\ -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,$$

легко получаются таким построением.

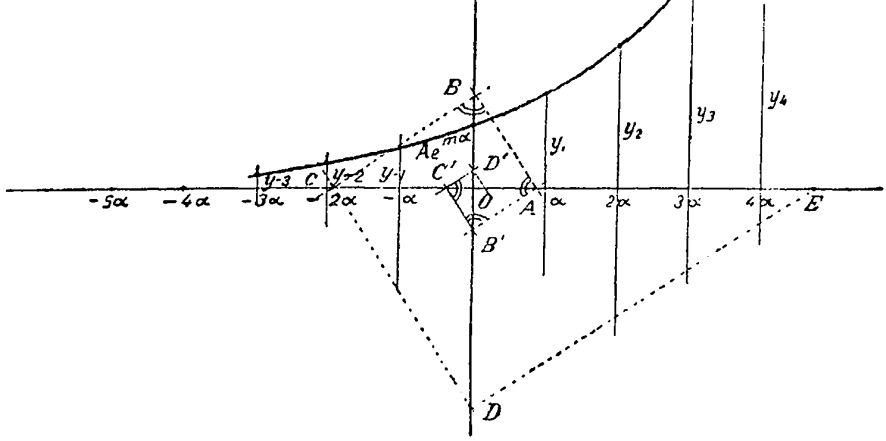


Рис. 126.

x	$y=e^x$	$y=e^{-x}$	x	$y=e_x$	$y=e^{-}{}_x$
0,0	1,000	1,000	1,6	4,953	0,202
0,1	1,105	0,905	1,7	5,474	0,183
0,2	1,221	0,819	1,8	6,050	0,165
0,3	1,350	0,741	1,9	6,686	0,150
0,4	1,492	0,670	2,0	7,389	0,135
0,5	1,649	0,607	2,1	8,167	0,122
0,6	1,822	0,549	2,2	9,025	0,111
0,7	2,014	0,497	2,3	9,974	0,100
0,8	2,226	0,449	2,4	11,02	0 0907
0,9	2,460	0,407	2,5	12,18	0,0821
1,0	2,718	0,368	2,6	13,46	0,0743
1,1	3,004	0,333	2,7	14,88	0,0672
1,2	3,200	0,301	2,8	16,44	0,0608
1,3	3,669	0,273	2,9	18,17	0,0550
1,4	4,056	0,247	3,0	20,09	0,04 8
1,5	4,482	0,223			

Отложим по оси X отрезок $OA=A$, а по оси Y отрезок $OB=Ae^{m\alpha}$ и соединим точки A и B; последовательно восстанавливаем перпендикуляры до пересечения с осями координат, как показано на рис. (126), и получим:

$$OA=y_0$$

$$OB=Ae^{m\alpha}=y_1;\quad OC=Ae^{2m\alpha}=y_2;\quad OD=Ae^{3m\alpha}=y_3\ \ldots$$

и аналогично

$$OB'=Ae^{-m\alpha}=y_{-1};\quad OC'=Ae^{-2m\alpha}=y_{-2};\quad OD'=Ae^{-3m\alpha}=y_{-3}\ \ldots$$

Проведя через деления ... $-3a$, $-2a$, $-a$, a, $2a$, $3a$ ... оси X ординаты и откладывая по ним соответственные величины y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, получим точки, принадлежащие показательной кривой $y = Ae^{mx}$.

§ 9. Синусоидальные кривые

А. Обыкновенная синусоида

1. Под обыкновенной синусоидой понимают геометрическое изображение уравнения

$$y = a \sin \varphi \tag{1}$$

в декартовых координатах ($\varphi = x$).

Если по оси X откладывается угол φ, возрастающий пропорционально времени, то

$$\varphi = \omega t$$

$$y = a \sin \omega t$$

T — период колебания; a — амплитуда; ω — угловая скорость; $f = 1 : T$ — частота колебаний, т. е. число периодов в одну секунду или иную единицу времени

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t. \tag{2}$$

Уравнение (2) определяет обыкновенное гармоническое колебательное движение. График простого гармонического колебательного процесса представляет собой последовательный ряд одинаковых синусоидальных волн.

2. Построение синусоидальной кривой можно делать помощью таблиц натуральных величин тригонометрических функций в произвольном одинаковом или разном по осям X и Y масштабе. Построение делается таким образом. По оси X откладывают некоторую длину, которую принимают за 360° или 180°. Делят ее на 36 или 18 частей и проводят через точки деления соответствующие ординаты, по которым откладывают произведения из амплитуды a на sin соответствующего этому делению угла. Пока угол φ изменяется от 0 до 180° (π), ординаты откладывают вверх как положительные; когда угол изменяется от 180° до 360° ($\pi - 2\pi$), то ординаты откладывают вниз как отрицательные.

На рис. 127 построена синусоида для значений угла φ от $-180°$ до 540° (от $-\pi$ до $+3\pi$).

Графически кривую указанного типа можно строить, не прибегая к таблицам тригонометрических функций, следующим образом. Приняв произвольную точку на оси X за центр—на рис. 127 эта точка взята для $\varphi = -90° \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, —описывают окружность радиусом a, равным амплитуде в уравнении (1). Делят окружност на равное число частей, например на 20, как сделано на рис. 127. На столько же частей делят длину, которую по оси X принимают за 2π или 360°. Через соответственные деления окружности и оси X проводят прямые, параллельные осям; точки пересечения, отвечающие одинаковым делениям по оси X и на окружности, принадлежат синусоиде.

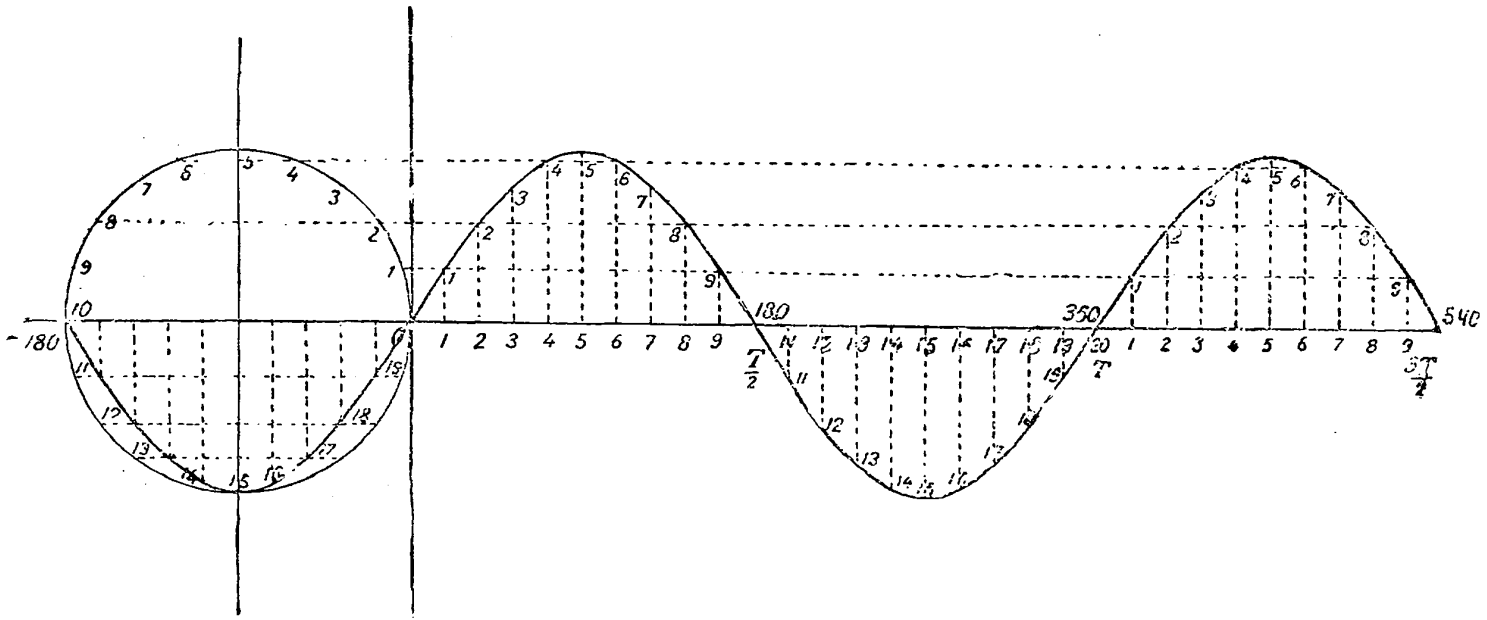


Рис. 127.

3. В более общем случае уравнение гармонического колебательного движения имеет вид:

$$y = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \beta\right). \tag{3}$$

β — начальная фаза, т. е. значение угла φ при $t = 0$,
$y_0 = a \sin \beta$ — начальная ордината.

Кривая этого типа представляет собой предыдущую синусоиду, сдвинутую влево при $\beta > 0$ или вправо при $\beta < 0$ как раз на величину начальной фазы. Для получения кривой такого вида достаточно перенести ось Y в первом случае направо на величину в масштабе рис. 127, отвечающую углу β, а во втором — налево.

4. Уравнение

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \beta\right) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

представляет собой ту же самую синусоиду (2), сдвинутую относительно начала координат на $\beta + \frac{\pi}{2}$ влево, если $\beta + \frac{\pi}{2} > 0$.

5. Сложение двух синусоид с одинаковым периодом.

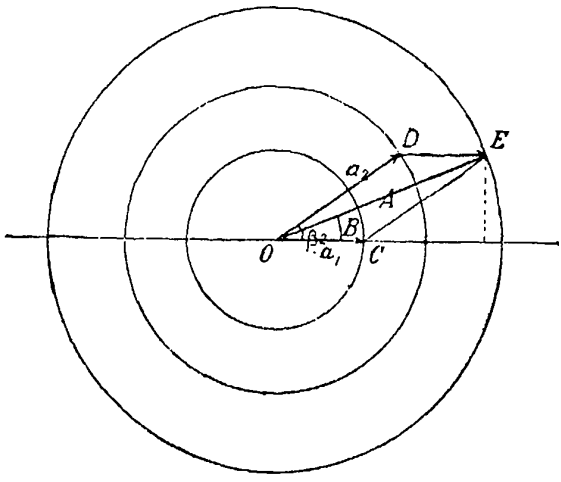


Рис. 128.

а) Начальные фазы равны нулю.

$$y_1 = a_1 \sin \omega t;$$
$$y_2 = a_2 \sin \omega t.$$

Тогда сумма ординат двух синусоид будет равна

$$Y = y_1 + y_2 = (a_1 + a_2) \sin \omega t, \tag{4}$$

т. е. получается обыкновенная синусоида, амплитуда которой равна сумме амплитуд заданных синусоид. Сдвиг фазы результирующей кривой равен нулю.

б) Начальная фаза $\beta_1 = 0$; $\beta_2 \neq 0$.

$$y_1 = a_1 \sin \omega t; \; y_2 = a_2 \sin(\omega t + \beta_2).$$

Тогда сумма ординат двух синусоид будет равна:

$$Y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + B), \tag{5}$$

где

$$A^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \beta_2 + a_2^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} B = \frac{a_2 \sin \beta_2}{a_1 + a_2 \cos \beta_2},$$

т. е. будет синусоида с амплитудой A и начальной фазой B. A и B будут амплитуда и начальная фаза суммарной синусоиды. Графически амплитуда A получается как диагональ OE параллелограма $ODEC$ (рис. 128), построенного на векторах $\overline{OC} = \overline{a_1}$ и $\overline{OD} = \overline{a_2}$ и $\angle DOC = \beta_2$. Найдя амплитуду A, строим окружность радиуса $OE = A$ и синусоиду, как сказано выше.

в) В еще более общем случае обе синусоиды будут иметь разные амплитуды a_1 и a_2 и начальные фазы β_1 и β_2, т. е.

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \beta_1) \quad \text{и} \quad y_2 = a_2 \sin(\omega t + \beta_2).$$

Тогда сумма их будет

$$\left.\begin{aligned} Y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega t + \beta_1) + a_2 \sin(\omega t + \beta_2) = A \sin(\omega t + B) \\ \text{где} \quad A^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(\beta_2 - \beta_1) + a_2^2; \quad \operatorname{tg} B = \frac{a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2}{a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

т. е. получится синусоида с амплитудой A и начальной фазой B, определяемыми приведенными выше выражениями.

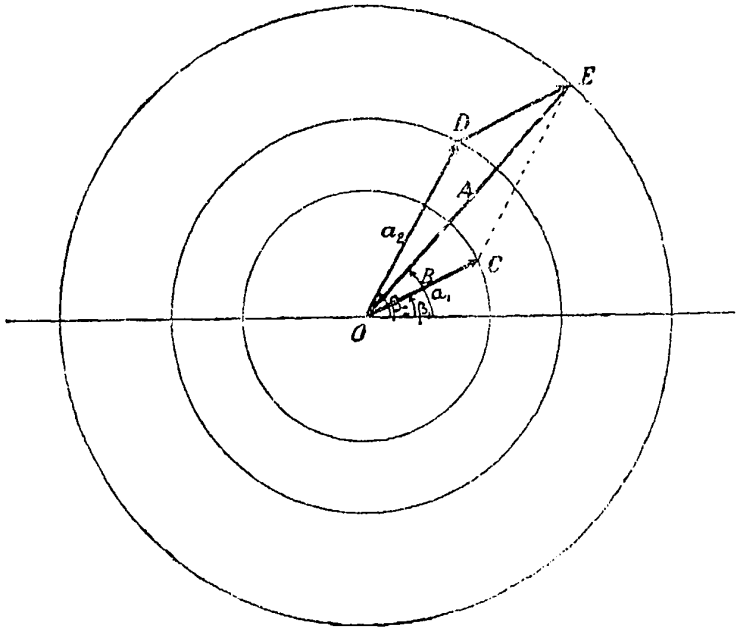


Рис. 129.

Амплитуда A есть диагональ OE параллелограма $ODEC$ (рис. 129), построенного на векторах $\overline{OC} = \overline{a_1}$ и $\overline{OD} = \overline{a_2}$. Найдя амплитуду A и начальную фазу B, построение синусоиды делаем, как сказано в пункте 2.

Очевидно, что во всех случаях [а), б), в)] результирующая синусоида может быть построена по точкам просто, как алгебраическая сумма ординат слагающих синусоид для тех же значений аргумента $(\omega t + \beta)$.

На рис. 130 построены две синусоиды: $y_1 = 14 \sin(\varphi + 30°)$ и $y_2 = 24 \sin(\varphi + 60°)$ и их сумма $Y = 36{,}8 \sin(\varphi + 49°{,}0)$.

Эту кривую можно построить по точкам, вычисляя ординаты Y по этой формуле; можно построить по точкам как сумму ординат кривых y_1 и y_2. Наконец, можно построить ее по точкам, как сказано в п. 2 настоящего параграфа, проведя окружность радиусом $A = 36{,}8$ и перенеся начало на 49°,0 в соответственную сторону.

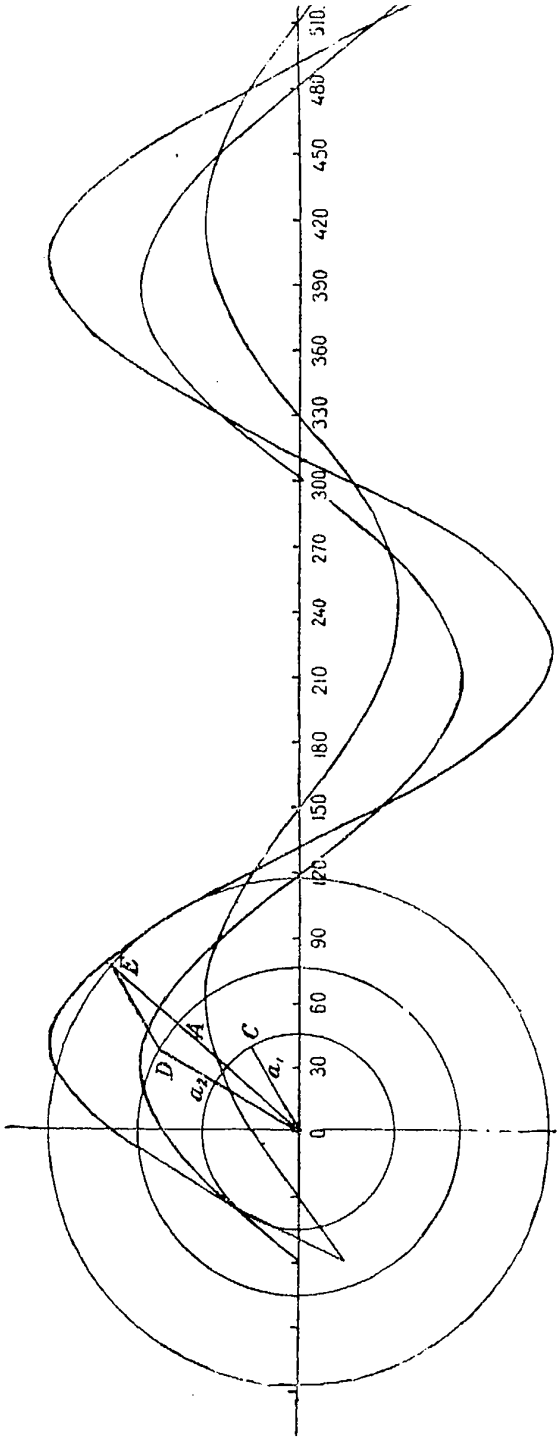


Рис. 130.

Б. Сложные синусоиды

Синусоиды, уравнение которых имеет вид:

$$y = a \sin n\varphi = a \sin n\omega t, \quad (7)$$

мы назовем сложными.

При $n = 1$ получается простая синусоида и функция y изменяется по так называемому полукруговому закону, т. е. y обращается два раза в ноль в течение одного периода и положительно для одной половины периода и отрицательно для другой.

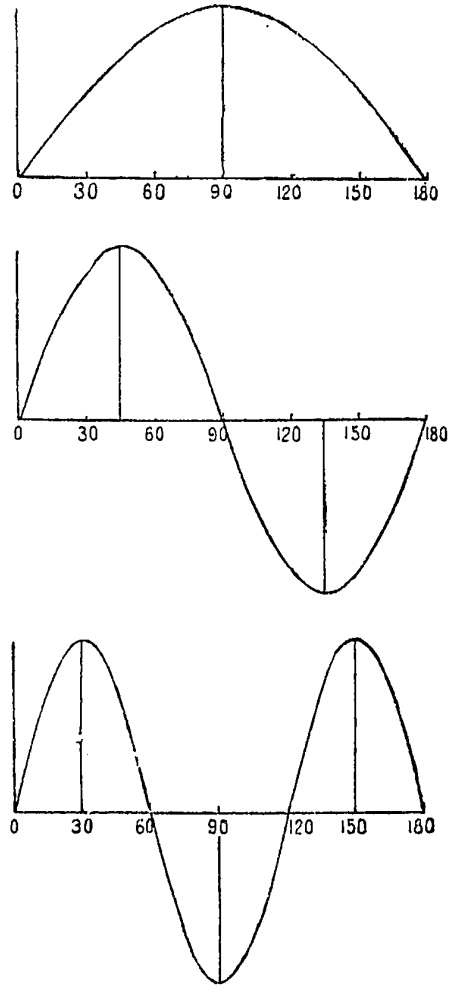


Рис. 131.

При $n=2$ получается синусоида сложного характера

$$y=a\sin 2\varphi=a\sin 2\omega t, \qquad (7)^*$$

представляющая функцию, изменение которой имеет четвертной характер, т. е. она в течение периода четыре раза обращается в ноль и меняет свой знак.

При $n=3$ получается синусоида сложного, так называемого шестерного характера

$$y=a\sin 3\varphi=a\sin 3\omega t, \qquad (7)^{**}$$

которая шесть раз пересекает ось X.

В общем случае функция $y=a\sin n\varphi$ переходит через ноль всякий раз, когда

$$n\varphi=k\pi,$$

т. е.

$$\varphi=\frac{k\pi}{n}\ (k\text{ — целое число}).$$

Кривая имеет наибольшую ординату, когда

$$\frac{dy}{d\varphi}=y'=an\cos n\varphi=0,$$

т. е. когда

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{k}\ (k\text{ — целое число}).$$

Очевидно, что если число колебаний при $n=1$ равно f в единицу времени, то при $n=2$ число колебаний будет $2f$, а при $n=3$ оно равно $3f$ и т. д.

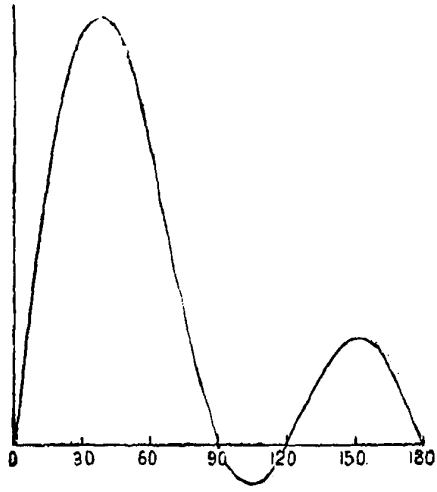


Рис. 132.

Периоды, наоборот, будут T, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$ и т. д.

Очевидно, что и в этих случаях могут быть начальные фазы, которые можно писать в одном из двух видов:

$$y_1=a\sin(2\varphi+\beta)\ \text{ или }\ a\sin 2\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right)$$

$$y=a\sin(3\varphi+\beta)\ \text{ или }\ a\sin 3\left(\varphi+\frac{\beta}{3}\right)$$

и т. д.

На рис. 131 показаны графики кривых $y_1=a_1\sin\varphi$; $y_2=a_2\sin 2\varphi$ и $y_3=a_3\sin 3\varphi$, причем начальные фазы равны 0. Более сложная синусоидальная кривая представит собой, например, сумму:

$$Y=y_1+y_2+y_3=a_1\sin\varphi+a_2\sin 2\varphi+a_3\sin 3\varphi,$$

вид которой при $a_1=a_2=a_3=25$ представлен на рис. 132.

В самом общем виде синусоидальная кривая представит сумму таких синусоид:

$$Y=A+a_1\sin(\varphi+\beta_1)+a_2\sin(2\varphi+\beta_2)+a_3\sin(3\varphi+\beta_3)+\ldots,$$

что можно написать еще в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} Y = A + B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi + \dots \\ + C_1 \cos\varphi + C_2 \cos 2\varphi + C_3 \cos 3\varphi + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Эти выражения представляют собой известные тригонометрические ряды (ряды Фурье) (Отдел II, глава 2, § 10).

Перемножение синусоид:

1. Пусть даны две синусоиды без начальных фаз

$$y_1 = a_1 \sin\varphi \quad \text{и} \quad y_2 = a_2 \sin\varphi.$$

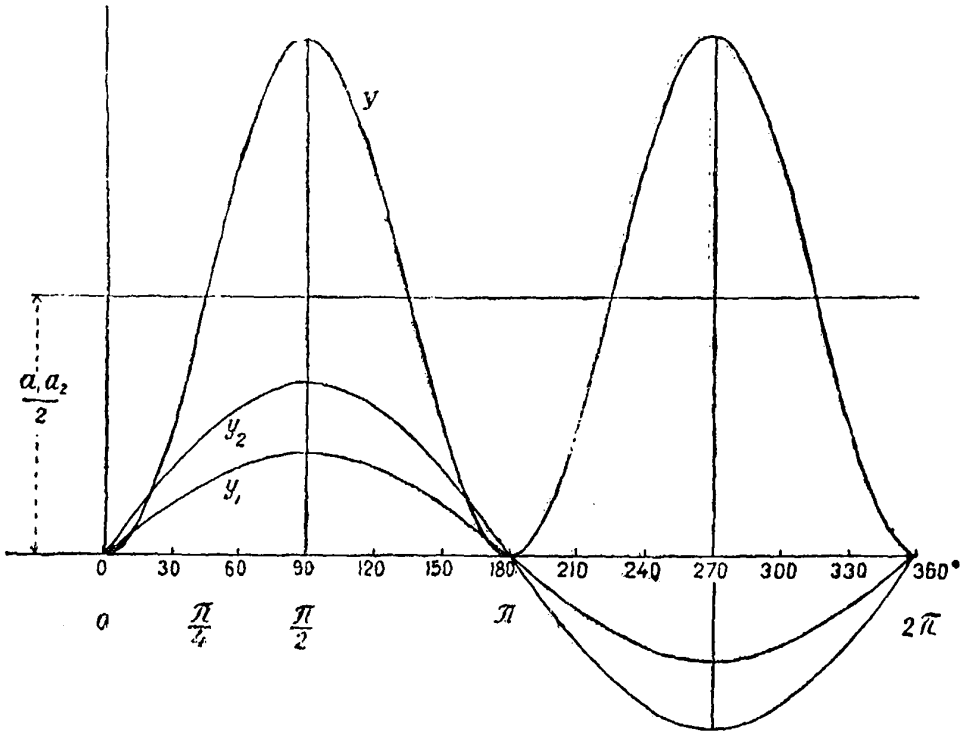


Рис. 133.

В произведении будем иметь

$$Y = y_1 y_2 = a_1 a_2 \sin^2\varphi,$$

так как

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi),$$

то

$$Y = \frac{a_1 a_2}{2} - \frac{a_1 a_2}{2}\cos 2\varphi.$$

Перенеся ось X в положительном направлении на величину $\frac{1}{2}(a_1 a_2)$ и обозначив

$$Y - \frac{a_1 a_2}{2} = \eta\,; \quad \frac{a_1 a_2}{2} = A,$$

получим: $$\eta = -A\cos 2\varphi = A\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin 2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (9)$$

т. е. получается сложная синусоида (четвертного характера), начальная фаза которой равна $-\frac{\pi}{2}$ и амплитуда равна $\frac{1}{2}\,a_1a_2$.

Для измерения ординат Y или η требуется ввести новый масштаб по оси Y.

На рис. 133 представлена синусоида, получаемая от перемножения двух синусоид: $y_1 = 15\sin\varphi$ и $y_2 = 25\sin\varphi$. Масштаб по оси уменьшен в 5 раз, так что

$$A = \frac{15\times 25}{2\times 5} = 37{,}5.$$

2. В более общем случае будем иметь:

$$y_1 = a_1\sin(\varphi + \beta_1) \text{ и } y_2 = a_2\sin(\varphi + \beta_2).$$

Произведение будет:

$$Y = y_1y_2 = a_1a_2\sin(\varphi+\beta_1)\sin(\varphi+\beta_2)$$

или

$$Y - \frac{a_1a_2}{2}\cos(\beta_1+\beta_2) = \eta = -\frac{a_1a_2}{2}\cos[2\varphi + (\beta_1+\beta_2)],$$

или

$$\eta = +A\sin 2\left[\varphi + \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2) - \frac{\pi}{4}\right], \qquad (10)$$

т. е. получится синусоида сложная, четвертного характера, начальная фаза равна $\left(\beta_1+\beta_2-\frac{\pi}{2}\right)$. Горизонтальная ось передвинута в сторону положительных y-ов на величину

$$\frac{a_1a_2}{2}\cos(\beta_1+\beta_2).$$

В. Синусоиды затухающего гармонического колебания

1. Закон затухающего гармонического колебательного движения выражается следующей формулой:

$$y = Ae^{-ht}\sin\omega t. \qquad (11)$$

При неограниченном возрастании переменной независимой (обычно время) Ae^{-ht} убывает, и так как $\sin\omega t$ не может быть больше ± 1, то кривая (рис. 134) неограниченно приближается к оси X. Точки пересечения кривой с осью X, т. е. моменты τ_0, при которых $y=0$, определяются из уравнения:

$$\sin\omega t = 0,$$

откуда

$$\tau_0 = \frac{k\pi}{\omega}\ (k - \text{целое число } 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ и т. д.})$$

или

$$\tau_0 = k\frac{T}{2}, \qquad (12)$$

т. е. каждые полпериода ордината кривой, обращаясь в 0, меняет свой знак, переходя от положительных значений y к отрицательным или наоборот.

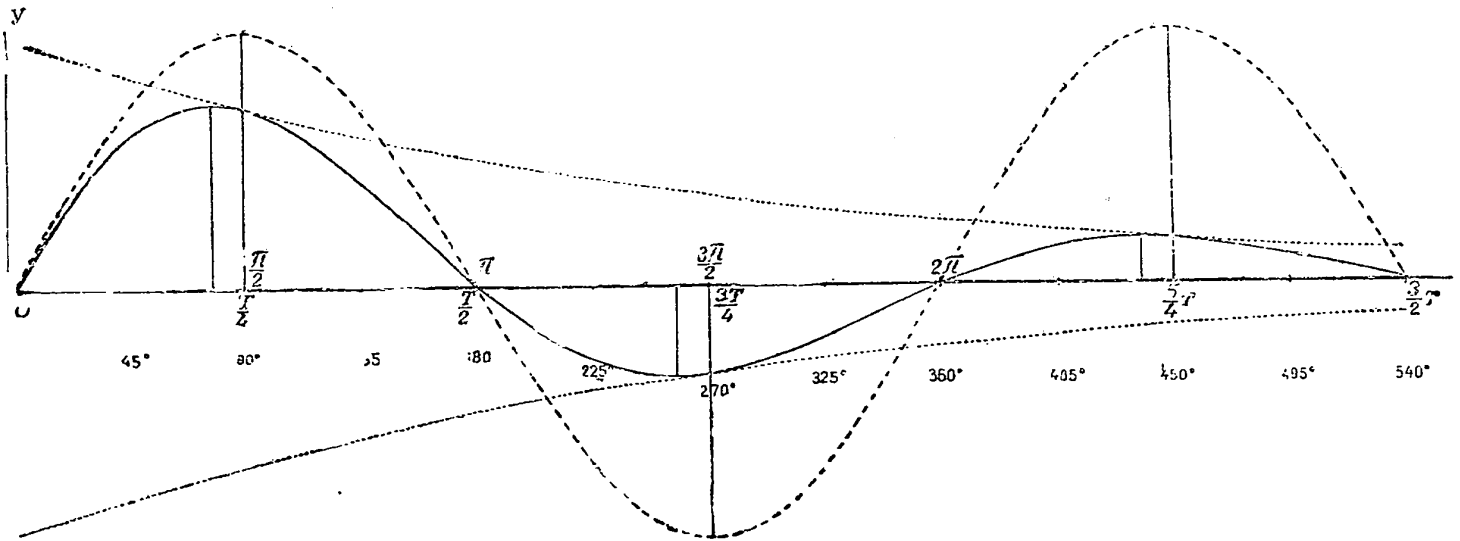

y
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
$\frac{3T}{4}$
$\frac{5}{4}T$
$\frac{3}{2}T$
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
360°
405°
450°
495°
540°

Рис. 134.

Ординаты достигают последовательно наибольших и наименьших значений для таких аргументов $t=\tau_m$, которые удовлетворяют уравнению

$$y' = Ae^{-ht}[\omega\cos\omega t - h\sin\omega t] = 0.$$

Положив

$$\left.\begin{aligned}\omega &= K\sin\varphi_0\\ h &= -K\cos\varphi_0\end{aligned}\right\},\ \text{т. е. } K=\sqrt{\omega^2+h^2};\ \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\omega}{h}, \tag{13}$$

найдем

$$y' = KAe^{-ht}\sin(\omega t+\varphi_0) = 0,$$

а так как KAe^{-ht} не равно нулю, то

$$\sin(\omega t+\varphi_0)=0$$

$$\omega\tau_m+\varphi_0 = k\pi\ (k-\text{целое число или } 0)$$

или

$$\tau_m = \frac{k\pi-\varphi_0}{\omega}\ (k-\text{целое число или } 0). \tag{14}$$

При переходе t через такие значения, производная y' обращается в 0, т. е. функция y достигает max или min.

Выражение для τ_m можно представить в таком виде:

$$\tau_m = \frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{h}+\frac{k\pi}{\omega}\ \ (k-\text{целое число или } 0). \tag{14*}$$

Отсюда видно, что последовательные экстремумы, т. е. max и min ординат, следуют один за другим через интервал $\frac{\pi}{\omega}=\frac{T}{2}$, т. е. через полпериода, так же как и точки, где ординаты равны 0. Общее выражение наибольшей ординаты, соответствующей числу k, будет:

$$Y_k = \pm Ae^{\left(\frac{h\varphi_0}{\omega}-\frac{h\pi}{\omega}k\right)}\sin\varphi_0, \tag{15}$$

т. е. последовательные наибольшие ординаты убывают в геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$.

Если бы не было затухания, то экстремумы функции

$$y_1 = A\sin\omega t$$

соответствовали бы значениям переменной

$$\tau'_m = \frac{2k+1}{2\omega}\pi\ (k-\text{целое число}). \tag{16}$$

Таким образом, при затухающем колебательном процессе не только сами наибольшие и наименьшие ординаты уменьшаются последовательно, но и смещаются абсциссы, соответствующие этим наибольшим и наименьшим значениям ординат. Это смещение есть величина постоянная, т. е. не зависящая от аргумента и числа k. Поэтому при $k=1$, получим

$$\Delta\tau = \tau'_m - \tau_m = \frac{2\varphi_0-\pi}{2\omega} = \frac{T}{2}\left[\frac{\varphi_0}{\pi}-\frac{1}{2}\right] \tag{17}$$

Кривые $\eta = \pm Ae^{-ht}$ — касательные к затухающей синусоиде в точках, соответствующих моментам τ'_m, называются ограничивающими

кривыми. Две последовательные наибольшие ординаты Y_{k-1} и Y_k, отстоящие на полпериода одна от другой, находятся в таком отношении:

$$\frac{Y_{k-1}}{Y_k} = e^{+\frac{h\pi}{\omega}}.$$

Натуральный логарифм этого отношения называется логарифмическим декрементом затухания

$$\mu = \ln\left(\frac{Y_{k-1}}{Y_k}\right) = \frac{h\pi}{\omega} = \frac{hT}{2}. \qquad (18$$

Откуда коэфициент затухания

$$h = \frac{2\mu}{T} = \frac{\ln\left(\frac{Y_{k-1}}{Y_k}\right)}{\frac{T}{2}}. \qquad (19$$

Кроме логарифмического декремента μ рассматривают иногда фактор затухания $f = \frac{Y_{k-1}}{Y_k} = e^{\mu}$, который прямо дает величину знаменателя геометрической прогрессии, в которой убывают последовательные амплитуды.

Следует иметь в виду, что вершины кривой y, т. е. ординаты, соответствующие последовательным значениям $\tau_m = \frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}$, не находятся на ограничивающей кривой $\eta = Ae^{-ht}$, а смещены в направлении убывающих значений t на величину $\Delta\tau$; между тем, точки касания ограничивающей кривой и затухающей синусоиды приходятся как раз на абсциссах, соответствующих max и min кривой $A\sin\omega t$, т. е. придутся на значениях $t = \frac{T}{4}$; $\frac{3T}{4}$; $\frac{5T}{4}$ и т. д.

На рис. 134 построена кривая для следующих значений параметров:

$$A = 50 \text{ мм}; \; h = 0{,}35; \; \omega = \frac{\pi}{2}; \; T = 4^s; \; f = \frac{1}{4}.$$

Масштаб рис. 134 сделан при $T = 180$ мм.

Соответственно этому будет $\varphi_0 = 102°{,}6$ и $\Delta\tau = \frac{T}{2}(0{,}070) = 2 \times 0{,}070 = +0^s{,}14$ или 6,3 мм в масштабе рис. 134, т. е. последовательные max и min будут на $0^s{,}14$ раньше соответственных max и min простой синусоиды.

2. Построение кривой затухающих гармонических колебаний.

Построение по точкам.

Обозначая $\eta = Ae^{-ht}$ и $y_1 = \sin\omega t$, получаем

$$y = \eta y_1,$$

т. е. ординаты y равны произведениям из ординат кривой η и кривой y_1. Вычисление ординат кривой Y делается с помощью таблиц величин e^{-x} просто. Все вычисления приведены в прилагаемой табличке, обнимающей промежуток времени, равный $6^s = 1\frac{1}{2}$ периода. Таблица величин e^x и e^{-x} может быть найдена в справочной книге Hütte (имеется русское издание) т. 1 и в английских таблицах L. M. Milne—Thomson and L. J. Comrie. Standart four-figure Mathematical Tables (London, 1931).

t	T	φ	ht	e^{-ht}	η мм	$\sin\varphi$	y мм
0^s,00	0	0°	0,000	1,000	50,0	0 000	0,0
0,25		22,5	0,087.	0,9163	45,8	0,383	17,5
0,5		45	0,175	0,8295	42,0	0,707	29,7
0,75		67,5	0,262.	0,7691	38,5	0,924	35,5
1,0	$^1/_4\,T$	90	0,350	0,7047	35,2	1,000	35,2
1,25		112,5	0,437.	0,6457	32,3	0,924	29,7
1,5		135	0,525	0,5916	29,6	0,707	20,9
1,75		157,5	0,612.	0,5420	27,1	0,383	10,4
2	$^1/_2\,T$	180	0,700	0,4966	24,8	0,000	0,0
2,25		202,5	0,787.	0,4550	22,8	— 0,383	— 8,7
2,5		225	0,875	0,4169	20,8	— 0,707	— 11,7
2,75		247,5	0,962.	0 3819	19,1	— 0,924	— 17,6
3	$^3/_4\,T$	270	1,050	0,3499	17,5	— 1 000	— 17,5
3,25		292,5	1,137.	0,3206	16,0	— 0,924	— 14,3
3,5		315	1,225	0,2938	14,7	— 0,707	— 10,4
3,75		337,5	1,312.	0,2691	13,5	— 0,383	— 5,2
4	1 T	360	1,400	0,2466	12,3	0,000	0,0
4,25		22,5	1,487.	0,2260	11,3	0,383	4,3
4,5		45	1,575	0,2070	10,3	0,707	7,2
4,75		67,5	1,662.	0,1896	9,5	0,924	8,8
5	$1^1/_4\,T$	90	1,750	0,1738	8,7	1,000	8,7
5,25		112,5	1,837.	0,1592	7,9	0,924	7 3
5,5		135	1,925	0,1458	7,3	0,707	5,2
5,75		157,5	2,012.	0,1336	6,7	0,383	2,6
6,0	$1^1/_2\,T$	180	2,100	0,1225	6,1	0,000	0,0

На рис. 134 сплошной линией показана кривая $y = Ae^{-ht}\sin\omega t$, прерывистой линией проведена кривая незатухающих колебаний $y_1 = A\sin\omega t$, точками показана ограничивающая кривая $\eta = Ae^{-ht}$.

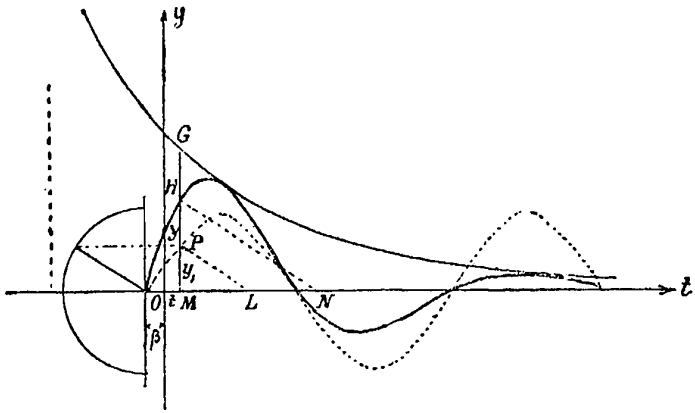


Рис. 135.

Если затухающее колебательное движение имеет начальную фазу β, то более общее выражение будет:

$$y = Ae^{-ht}\sin(\omega t + \beta). \qquad (20)$$

Очевидно, что кривая в этом случае представляет собой предыдущую кривую (11), сдвинутую влево при $\beta > 0$ или вправо при $\beta < 0$ относительно начала координат (рис. 135).

3. Графическое построение кривой. Как сказано выше, ординаты y кривой получаются от перемножения ординат $\eta = Ae^{-ht}$ и $y_1 = \sin(\omega t + \beta)$. Если взять за масштаб по оси Y величину Ae^{h}, а по оси X величину A, то, применяя графический процесс, указанный на стр. 178, получим ординаты ограничивающей кривой $\eta = Ae^{-ht}$. Кривая $y_1 = \sin(\omega t + \beta)$ представляет собой обыкновенную синусоиду, сдвинутую относительно начала координат на величину β, ординаты которой y_1 получаются путем, указанным на стр. 180. Так как ординаты затухающей кривой $y = \eta \cdot y_1$, то (рис. 135) $y : \eta = y_1 : 1$, т. е. ордината y есть четвертый член пропорции, три члена которой суть η, y_1 и 1. Для того, чтобы построить точку H кривой y, соответствующую произвольному значению $t = OM$, откладываем $ML = 1$ и $MN = \eta = MG$. Точку L соединяем с P на кривой $y_1 = \sin(\omega t + \beta)$, а через точку N проводим прямую $NH \parallel LP$. Эта линия NH в пересечении с ординатой MG в H даст точку, принадлежащую кривой y, так как по построению

$$\frac{MH}{MP} = \frac{y}{y_1} = \frac{\eta}{1} = \frac{MG}{1}.$$

§ 10. Циклоидальные кривые

1. Циклоида. Если круг радиуса a катится без скольжения по прямой OX (основание), то геометрическое место точки M (x, y),

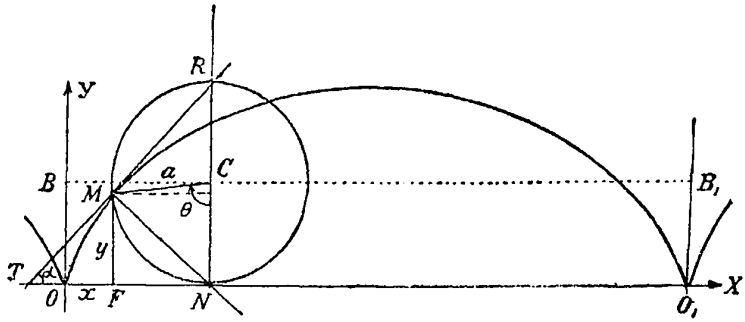


Рис. 136.

лежащей на окружности, будет кривая, называемая циклоидой (рис. 136, 137). Уравнение циклоиды в параметрической форме имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где θ есть угол, указанный на рис. 136; он представляет собой поворот радиуса CM катящегося (производящего) круга от начального положения его. Достаточно рассмотреть изменение угла θ от 0 до 2π, что соответствует полному обороту производящего круга и передвижению точки M из O в O_1. Очевидно, что $OO_1 = 2\pi a$. Предшествующие и последующие обороты дадут ветви кривой, тождественные рассматриваемой для θ от 0 до 2π.

Уравнение циклоиды в прямоугольных координатах имеет следующий вид:

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}, \qquad (2)$$

но в таком виде уравнение, вследствие сложности, мало применимо и параметрическая форма более удобна для выяснения главнейших свойств этой кривой. Точку *4* (рис. 137) называют вершиной кривой, а линию *4L* — осью.

Касательная *TMR* к циклоиде в точке *M* составляет с осью *X* угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ (рис. 136); построение касательной к циклоиде делается поэтому так: проводят диаметр *RCN* соответственно положению точки *M*; конец диаметра *R* соединяют с точкой *M* — это будет касательная; соединяют точку *M* с *N*, получают нормаль.

Длина нормали

$$MN = 2a \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{2ay}.$$

Радиус кривизны

$$R = 4a \sin \frac{\theta}{2} = 2MN = \text{удвоенной длине нормали.}$$

Длина дуги *OM*

$$l = 8a \sin^2 \frac{\theta}{4} = 4a \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right) = 4a + 2\sqrt{2a(2a - y)}.$$

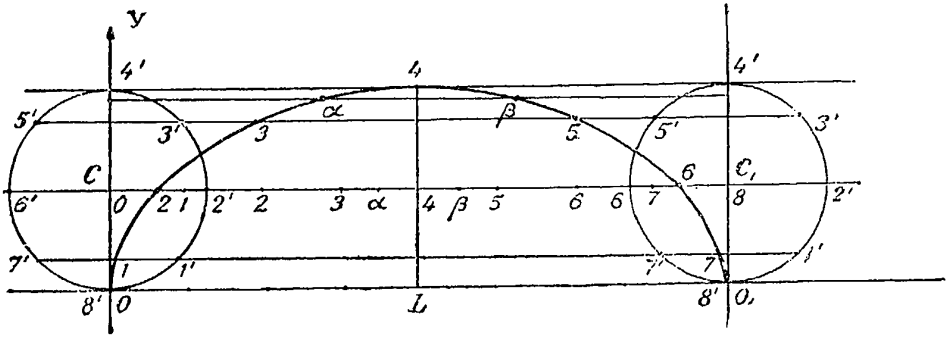


Рис. 137.

Длина всей ветви

$$L = 8a.$$

Площадь *OMF*

$$S = a^2 \left(\frac{3}{2}\theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta\right) = \frac{3}{2} ax - \frac{1}{2} y \sqrt{y(2a - y)}.$$

Площадь всей циклоиды

$$S = 3\pi a^2 = 3 \text{ площади производящего круга.}$$

Построение циклоиды (рис. 137). Длину $2\pi a = CC_1$, равную пути, пройденному центром *C* производящего круга, делят на равное число частей, например 8, и на столько же частей делят окружность производящего круга. Отмечают точки *0, 1, 2, 3, ..., 7* и *8* на линии CC_1 и точки *0, 1', 2', 3', ..., 7'* и *8'* на окружности. Через эти деления окружности проводят линии, параллельные оси *X*. Ставят ножку циркуля в точку *1* на прямой CC_1 и растворением его, равным радиусу *a* производящего круга, засекают линию *1',1'* получается точка *1*, принадлежащая циклоиде. Ставят ножку циркуля в точку *2* прямой CC_1 и тем же растворением засекают линию *2'2'* и находят точку циклоиды *2*. Так же поступают для получения точки *3*. Вторую половину кривой, симметричную первой относительно оси *L4*, получают

таким же приемом. Если надо уточнить форму кривой, то в нужных местах можно сделать дополнительные деления α и β и найти точки α и β циклоиды.

2. Трохоида. Если окружность катится без скольжения по прямой, то точка, лежащая на радиусе окружности или на его продолжении, описывает кривую, называемую трохоидой (рис. 138).

Если точка M находится внутри окружности производящего круга, то кривая называется укороченной трохоидой; если точка M лежит вне окружности, то получается удлиненная трохоида или трохоида с петлями. Иногда такие кривые называют укороченной и удлиненной циклоидами. Уравнение трохоиды в параметрической форме имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\theta - h\sin\theta \\ y &= a - h\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

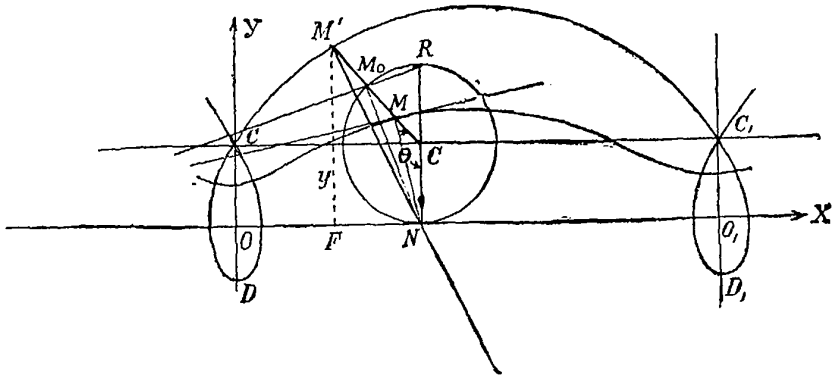


Рис. 138.

где h есть расстояние от центра C производящего круга до точки M или M'. Расстояние h удобно представлять в виде $h = m \cdot a$, где m или > 1, или < 1.

Очевидно, что по мере приближения m к 1 или h к a, обе трохоиды как укороченная, так и удлиненная стремятся к общему пределу, который будет обыкновенной циклоидой, как видно из рис. 139.

Построение трохоиды. Для построения трохоиды поступают так же, как для построения циклоиды. Получив точки, принадлежащие циклоиде, проводят радиусы производящего круга и по этим линиям откладывают в должную сторону $h - a$ от точек, принадлежащих циклоиде; для удлиненной трохоиды $h - a > 0$ и точки будут вне циклоиды, а для укороченной — внутри. Полученные точки соединяют согласной кривой.

Если $h > a$, то трохоида образует петли, т. е. имеет двойные точки E и E' (рис. 139), которые приходятся на оси Y. В зависимости от отношения между величиной h и радиусом круга a эти точки могут располагаться различным образом относительно точки C или линии CC_1, а именно: если

1) $h < a\frac{\pi}{2}$, то двойная точка E лежит между точками O и C (рис. 139).

2) $h = a\frac{\pi}{2}$, то двойная точка E лежит в точке C (рис. 138).

3) $h > a\frac{\pi}{2}$ „ „ „ „ выше точки C (рис. 139).

Положение двойных точек E и E_1 определяется из условия, что $x = 2k\pi$. Кроме очевидного ответа $\theta = 2k\pi$, соответствующего точкам D, D_1,..., второе решение получается из трансцендентного уравнения $a\theta - h\sin\theta = 0$. Решение его будет θ_m, действительное при $h > a$. Ордината y_m точек E определится по общей формуле $y_m = a - h\cos\theta_m$. Для рис. 139 $h = 25$ *мм*; $a = 19$ *мм*; потому

$$\theta_m = 71°,55$$

и соответственно

$$y_m = 11{,}1 \text{ мм}.$$

Часть ветви трохоиды от точки D (O) до 3 (рис. 139) соответствует изменению угла θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$; часть от точки 3 до вершины 6 отвечает повороту катящегося круга от $\frac{\pi}{2}$ до π; от вершины 6 до точки 9 соответствует повороту катящегося круга от π до $\frac{3\pi}{2}$ и ветвь от 9 до D_1 (12) — от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π.

Как видно из рис. 138 и 139 в начале движения, абсцисса x делается отрицательной и достигает наименьшей величины в точке, в которой касательная перпендикулярна к оси X, т.е. для значения угла θ_0, определяемого условием $a - h\cos\theta_0 = 0$, откуда $\theta_0 = \text{arc}\cos\left(\frac{a}{h}\right)$, а соответствующая ордината равна 0, т.е. эти точки приходятся на оси X.

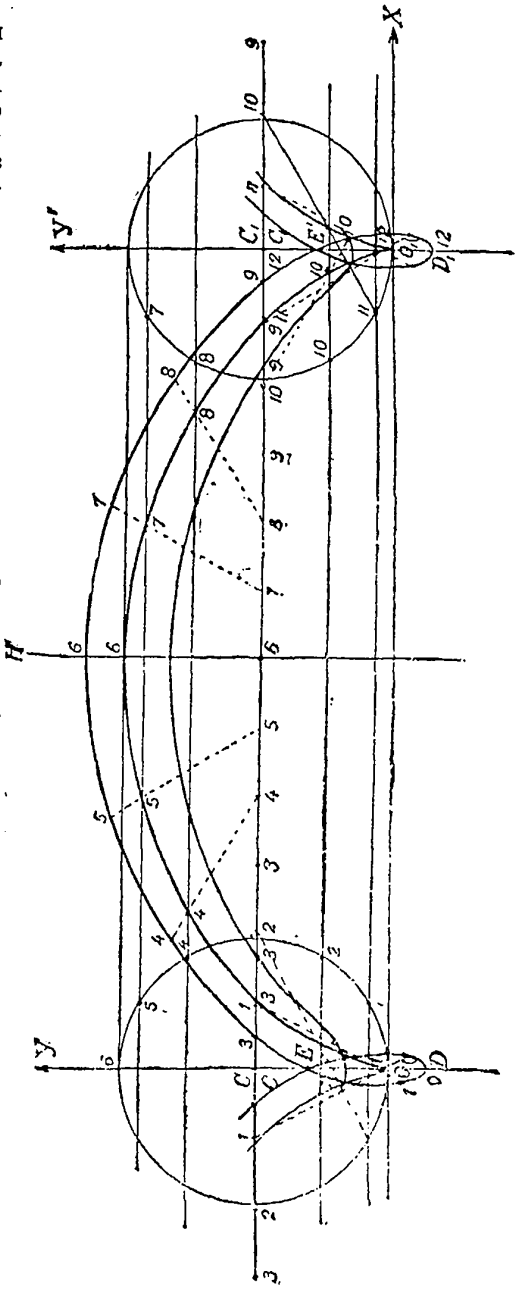


Рис. 139.

Касательная к трохоиде составляет с осью X угол α, который определится из выражения:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{h\sin\theta}{a - h\cos\theta} = \frac{a\theta - x}{y}. \tag{4}$$

Поэтому касательную к трохоиде проводят подобно тому, как к циклоиде: соединяют точку M или M' (рис. 138) с точкой N касания катящегося круга и оси X; это будет нормаль к трохоиде; перпендикуляр к нормали даст искомую касательную.

Длина нормали

$$MN = (a^2 - 2ah\cos\theta + h^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Радиус кривизны

$$R = \frac{(a^2 - 2ah\cos\theta + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(a\cos\theta - h)}. \tag{6}$$

3. Эпициклоида. Если производящий круг катится без скольжения по окружности неподвижного круга снаружи его, то некоторая точка M окружности катящегося круга опишет кривую, называемую эпициклоидой (рис. 140).

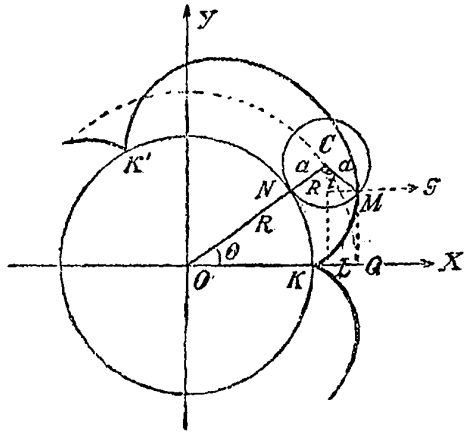


Рис. 140.

Обозначим через a радиус катящегося круга, а через R радиус неподвижного; угол $KOC = \theta$, а угол $NCM = t = \frac{R\theta}{a}$; тогда в параметрической форме уравнение эпициклоиды будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+a)\cos\theta - a\cos\left[\left(\frac{R+a}{a}\right)\theta\right] \\ y &= (R+a)\sin\theta - a\sin\left[\left(\frac{R+a}{a}\right)\theta\right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Начало координат в центре неподвижного круга O. Положительная ось X направлена через начальную точку K кривой. Если независимым

параметром принять угол t поворота катящегося круга, то в уравнении эпициклоиды (7) надо подставить $0=\frac{a}{R}t$.

$$\left.\begin{aligned} x&=(R+a)\cos\frac{a}{R}t-a\cos\left[\left(\frac{R+a}{R}\right)t\right]\\ y&=(R+a)\sin\frac{a}{R}t-a\sin\left[\left(\frac{R+a}{R}\right)t\right]\end{aligned}\right\} \qquad (7)^*$$

Точка, соответствующая повороту катящегося круга на угол π, называется вершиной; точки K и K' — начало и конец ветви.

Кривая состоит из ряда одинаковых дуг, каждая из которых соответствует полному обороту катящегося круга, т. е. увеличению угла t на 2π, а угла 0 на $\frac{2\pi a}{R}$. Поэтому концы этих дуг, т. е. точки K, K' и т. д., соответствуют таким значениям угла 0:

$$0=0,\ \frac{2\pi a}{R},\ \frac{2\pi a}{R}2,\ \ldots,\ \frac{2\pi a}{R}p,$$

где p — некоторое целое число. Чтобы кривая когда-нибудь вернулась к своей прежней начальной точке K необходимо, чтобы существовали целые числа p и q, удовлетворяющие условию:

$$2\pi ap=2\pi Rq,$$

так как точке K соответствует некоторое число полных оборотов около точки O. Отсюда следует:

$$\frac{a}{R}=\frac{q}{p}; \qquad (8)$$

такие числа p и q будут существовать только в том случае, когда длины радиусов R и a неподвижного и подвижного кругов будут соизмеримы между собой. В противном случае отношение a к R есть число иррациональное, а потому не может быть равным отношению двух целых чисел.

Поэтому эпициклоида представляет замкнутую кривую тогда и только тогда, когда величины радиусов неподвижного и подвижного кругов соизмеримы. В противном же случае кривая будет незамкнутой и, выйдя из точки K, в нее никогда больше не возвратится.

Термин эпициклоида был предложен в 1674 г. датским астрономом Ole Römer, который доказал, что зубчатые колеса, имеющие эпициклоидальный профиль зубцов, движутся с наименьшим трением.

Если точка находится не на окружности катящегося круга, то она описывает кривую, называемую эпитрохоидой.

Если точка M лежит вне окружности катящегося круга, то аналогично циклоиде получится удлиненная эпитрохоида (*III*, рис. 141), у которой будут петли при каждой точке K, K' и т. д. Если точка M лежит внутри окружности катящегося круга, то получится укороченная эпитрохоида (*IV*, рис. 141). Если буквой h назвать расстояние точки от центра C катящегося круга, то уравнения удлиненной или укороченной эпициклоиды в параметрической форме имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=(R+a)\cos 0-h\cos\left[\left(\frac{R+a}{a}\right)0\right]\\ y&=(R+a)\sin 0-h\sin\left[\left(\frac{R+a}{a}\right)0\right]\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Удобно расстояние точки M от центра катящегося круга обозначать через ma, где m — число >1 или <1, т. е. полагать $h=ma$. Если, независимым параметром принять угол t при центре катящегося круга, то надо в (9) подставить $\theta=\frac{a}{R}t$.

Эпициклоиды представляют собой некоторые каустические кривые.

Каустика (καυστικός — зажигательный, горящий). В оптике термин каустика дается огибающим пучка световых лучей после его отражения или преломления.

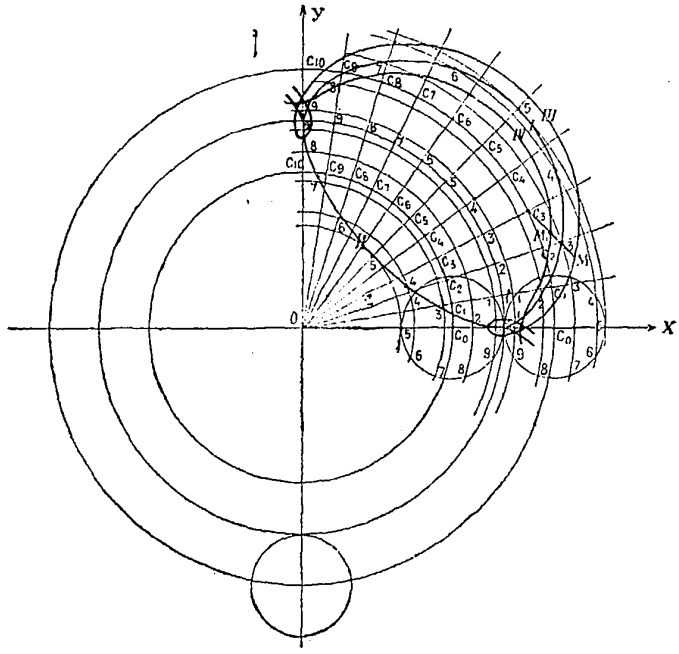


Рис. 141.

Простейший случай каустической кривой (меридианная кривая каустической поверхности) будет тот, когда отражающая поверхность шаровая и лучи исходят из одной точки на поверхности.

4. Гипоциклоида (ὑπό — под). Если круг радиуса a катится внутри неподвижного круга радиуса R, то точка окружности описывает кривую, называемую гипоциклоидой.

Уравнение гипоциклоиды в параметрической форме будет:

$$\left.\begin{aligned} x&=(R-a)\cos\theta+a\cos\left[\left(\frac{R-a}{a}\right)\theta\right]\\ y&=(R-a)\sin\theta-a\sin\left[\left(\frac{R-a}{a}\right)\theta\right]\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

и получается из уравнения эпициклоиды переменой знака у a на отрицательный. Положительная ось X направлена к начальной точке K (рис. 142). Если независимым параметром принять угол t, то в уравнение гипоциклоиды (10) надо подставить $\theta=\frac{a}{R}t$.

Подобно эпициклоиде кривая будет замкнутая, т. е. состоящая из конечного числа дуг, если длины радиусов R и a соизмеримы; в противном случае кривая будет незамкнутая и в исходную точку K она никогда не вернется. Если точка M лежит вне или внутри окружности катящегося круга в расстоянии h от центра, то получим удлиненную или укороченную гипотрохоиду. Уравнение кривых этого рода, очевидно, будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-a)\cos\theta + h\cos\left[\left(\frac{R-a}{a}\right)\theta\right] \\ y &= (R-a)\sin\theta - h\sin\left[\left(\frac{R-a}{a}\right)\theta\right] \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $\theta = \frac{a}{R}t$;

Здесь тоже удобно расстояние h производящей точки от центра катящегося круга выражать в частях радиуса последнего, т. е. полагать $h = ma$. Заметим, что этот обширный класс кривых, упомянутых в настоящем параграфе, носит общее название рулет.

Проведение касательной и нормали. Нормаль к эпициклоиде и гипоциклоиде в любой точке M кривой представляет собой прямую, проходящую через точку касания N подвижного и неподвижного кругов и точку M. Прямая, перпендикулярная к этой линии, будет касательная (рис. 142 и 143).

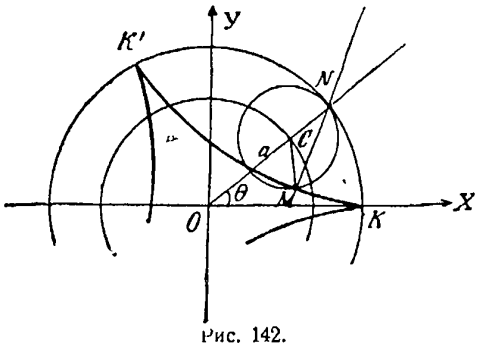


Рис. 142.

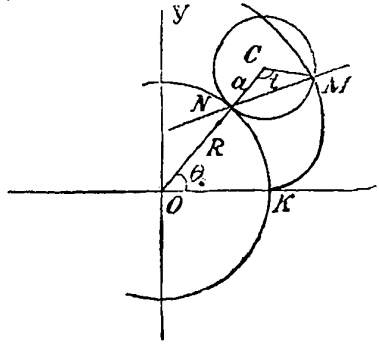


Рис. 143.

Радиус кривизны R_1 в точке M

$$R_1 = \frac{4a(R \pm a)}{R \pm 2a}\sin\frac{R}{2a}\theta = \frac{4a(R \pm a)}{R \pm 2a}\sin\frac{t}{2}; \qquad (12)$$

верхние знаки относятся к эпициклоиде, а нижние к гипоциклоиде. В точке K $R_1 = 0$; в вершине кривой ($t = \pi$)

$$R_1 = \frac{4a(R \pm a)}{R \pm 2a}. \qquad (12)^*$$

Площадь сектора, ограниченного линиями OK и OM и дугой кривой, равна (рис. 142 и 143):

$$S = \frac{1}{2}\frac{a}{R}(R \pm a)(R \pm 2a)\left(\frac{R}{a}\theta - \sin\frac{R}{a}\theta\right) \qquad (13)$$

или

$$S=\frac{1}{2}\frac{a}{R}(R\pm a)(R\pm 2a)(t-\sin t). \qquad (13)^*$$

Площадь кривой, ограниченной линией OK и радиусом-вектором, направленным к вершине кривой (всегда $t=\pi$), будет равна:

$$S_0=\frac{\pi}{2}\frac{a}{R}(R\pm a)(R\pm 2a). \qquad (13)^{**}$$

Если $k=R:a=$ целое число, то S площадь всей эпициклоиды $=2kS_0$. $(13)^{***}$

Длина дуги от K до M

$$l=4\frac{a}{R}(R\pm a)\left(1-\cos\frac{R}{2a}0\right)=4\frac{a}{R}(R\pm a)\left(1-\cos\frac{t}{2}\right). \qquad (14)$$

Длина дуги от K до вершины (точка *5*, рис. 141), где $t=\pi$ для любой эпициклоиды

$$L_0=4\frac{a}{R}(R\pm a). \qquad (14)^*$$

$$\text{Вся дуга } \left(\text{при } k=\frac{R}{a} \text{ целом}\right) L=2kL_0;$$

при $R=\infty$ получаются формулы для циклоиды.

Построение эпициклоиды и гипоциклоиды. Разделим окружность катящегося круга в его начальном положении (центр C_0) на n частей (рис. 141, $n=10$) и занумеруем эти точки. Часть окружности неподвижного круга, равную длине окружности подвижного круга, разделим на такое же число частей. Приняв точку O — центр неподвижного круга — за центр, опишем ряд окружностей радиусами соответственно равными $01=09$, $02=08$, $03=07$ и т. д. до радиуса $05=R+2a$. На рис. 141 принято $R=30$ *мм*, $a=7{,}5$ *мм*. Отметим точки C_1, C_2, C_3, ..., C_{10}, соответственные положения центра катящегося круга, в пересечении окружности радиуса OC_0 с радиусами основного круга, проведенными через каждое деление этой окружности. Ставим ножку циркуля в точку C_1 и радиусом, равным $a(a=7{,}5$ *мм*), засекаем окружность 01; в пересечении, в точке *1*, получится точка, принадлежащая эпициклоиде, соответствующая повороту катящегося круга на $\frac{2\pi}{n}$, т. е. перемещению его центра из C_0 в C_1. Ставим ножку циркуля в точку C_2 и радиусом, равным a, засекаем вторую концентрическую окружность радиуса 02; получим точку *2*, принадлежащую эпициклоиде, отвечающую такому положению катящегося круга, когда центр его будет в точке C_2 или когда точки *2* и *2* подвижного и неподвижного кругов совместятся. Поступая таким же путем, получим остальные точки *3*, *4*, *5*, ..., *9* и *10*, соединив которые согласной кривой, получим эпициклоиду *I*, показанную на рис. 141.

Для построения гипоциклоиды проводим катящуюся окружность, в начальном положении касающуюся основного круга внутри, и делим

эту окружность на n частей. Часть окружности неподвижного круга, равную длине подвижного круга, разделим также на n частей и, проведя соответствующие радиусы этого круга, заметим положения C_0, C_1, C_2, ..., C_9, C_{10} центров катящейся окружности. Поступая так же, как указано выше, найдем положение точек *1*, *2*, *3*, ..., *9*, *10*, принадлежащих гипоциклоиде *II* (рис. 141); соединив их согласной кривой, получим искомую гипоциклоиду *II* (астроида).

Чтобы построить удлиненную *(III)* и укороченную *(IV)* эпитрохоиды, поступаем таким образом. Соединяем, например, точку C_3 — центр катящегося круга — с соответствующей точкой *3* эпициклоиды *(I)* и по этой линии от точки C_3 откладываем $h = C_3M > a$ для удлиненной и $h' = C_3M' < a$, для укороченной (на рис. 141 $h = 10$ *мм* и $h' = 5$ *мм*); точки M и M_1 принадлежат упомянутым кривым. Построив таким образом достаточное число (10) точек, соединяем их согласными кривыми и получаем удлиненную *(III)* и укороченную *(IV)* эпитрохоиды. Подобным же путем можно построить удлиненную и укороченную гипотрохоиды.

Частные виды эпициклоид и гипоциклоид

Наибольший интерес представляют некоторые частные виды рулет, соответствующие простым отношениям между R и a.

1. $R : a = 1 : 1$ или $R = a$
2. $R : a = 2 : 1$ или $R = 2a$
3. $R : a = 3 : 1$ или $R = 3a$
4. $R : a = 4 : 1$ или $R = 4a$

а) **Кардиоида** (καρδία — сердце). Если радиусы неподвижного и подвижного кругов равны, то получается кривая, известная под названием кардиоиды (рис. 144). Полагая $R = a$, получим из (7) уравнение кардиоиды в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos\theta - a\cos 2\theta \\ y &= 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Уравнение кривой в прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \qquad (16)$$

Для получения уравнения в полярных координатах примем точку K за полюс и будем углы $\varphi = MKX$ отсчитывать от оси $+X$; тогда радиус-вектор $r = KM$. Продолжив радиус CM до пересечения с осью X в точке R, увидим, что фигура $OCMK$ есть равнобокая трапеция, и потому углы $\theta = \varphi = t$, т. е. $KM \parallel OC$. Так как $r\cos\varphi = x - a$ и $r\sin\varphi = y$, то легко найдем искомое уравнение кардиоиды в полярных координатах.

$$r = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Удобнее в некоторых случаях положительным направлением полярной оси взять линию OL и отсчитывать углы φ от этого направления; тогда уравнение в полярных координатах такой системы будет:

$$r = 2a(1 + \cos\varphi). \qquad (17)$$

В этом случае кардиоида будет расположена, как показано на рис. 145.

Это уравнение показывает, что кардиоиду можно строить по точкам не как частный случай эпициклоиды, а проще, следующим образом. Проведем хорду OD под углом φ к полярной оси и от точки D отложим отрезок $DM=2a$. Точка M принадлежит кардиоиде, поэтому проводим через полюс O ряд радиусов-векторов и замечаем точки пересечения их с окружностью основного круга ODA. От этих точек откладываем по радиусам-векторам отрезки, равные $2a$. Полученные точки соединяем согласной кривой, это и будет кардиоида.

Кардиоида представляет собой каустическую кривую, получаемую при отражении от сферической поверхности лучей, исходящих из точки, расположенной на поверхности сферы.

Длина дуги кардиоиды $L=16a$, т. е. в восемь раз больше диаметра основного круга.

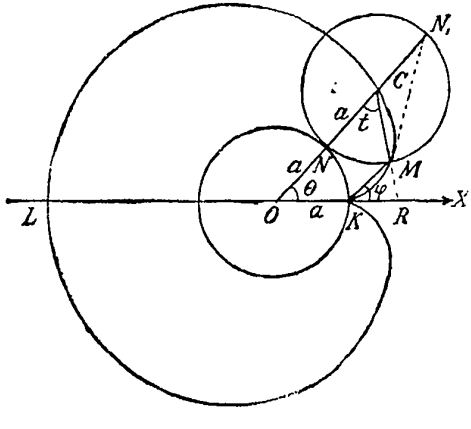


Рис. 144.

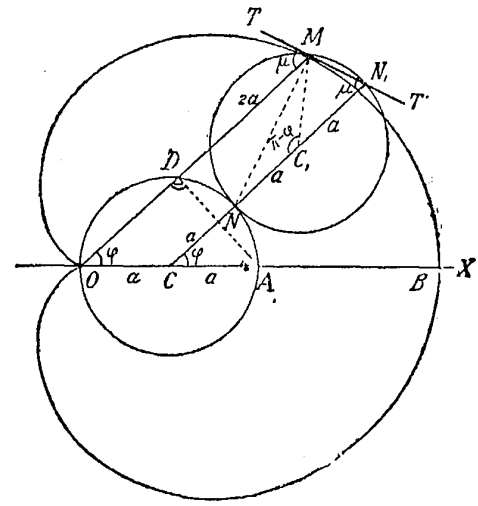


Рис. 145.

Площадь кардиоиды $S=6\pi a^2$, т. е. в шесть раз больше площади основного круга.

Проведение касательной к кардиоиде. Угол μ между касательной MT в точке M и радиусом-вектором $OM=r$ (рис. 145) определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\mu=-\frac{r}{r'}=\frac{2a(1+\cos\varphi)}{+2a\sin\varphi}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

то есть

$$\mu=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}. \qquad (18)$$

Это дает простой способ построения касательной к кардиоиде в данной точке M. Проводим радиус-вектор OM и через точку C — центр неподвижного круга — проводим прямую CNN_1 параллельно OM. Отложим $CN_1=3a$. Соединив точку N_1 с M, получим касательную TMT' к кардиоиде в точке M. Действительно, если C_1 есть центр катящегося круга, то $\angle NC_1M=\pi-\varphi$ по свойству кардиоиды, а по-

тому $\angle MC_1N_1=\varphi$, а в треугольнике MC_1N_1 (равностороннем) углы при точках M и N_1 равны $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$, т. е. линия N_1M есть касательная к кардиоиде.

Таким образом, чтобы построить касательную к кардиоиде в точке M, достаточно соединить эту точку с концом N_1 того диаметра катящегося круга, другой конец которого находится в точке касания катящегося круга с неподвижным. Нормаль пройдет по прямой MN.

Выведенное правило построения касательной к кардиоиде получается просто из кинематических соображений. Известно, что вообще движение неизменяемой системы на плоскости в каждый данный момент сводится к вращению вокруг мгновенного центра, причем, вообще говоря, положение этой точки меняется с течением времени. В случае движения, указанного на рис. 145, мгновенный центр есть точка соприкосновения N катящегося круга с неподвижным, и, следовательно, скорость движущейся точки M, направленная по касательной к кардиоиде, перпендикулярна к линии NM, т. е. это есть нормаль к кардиоиде, а перпендикулярная к нему линия N_1M — касательная к кардиоиде. Из этих соображений следует, что приведенное правило построения касательной годится вообще для кривых, описанных некоторой точкой окружности, катящейся без скольжения по некоторой кривой.

б) Улитка Паскаля. Точки M или M', не лежащие на окружности подвижного круга, для случая $R=a$ опишут кривые, которые назы-

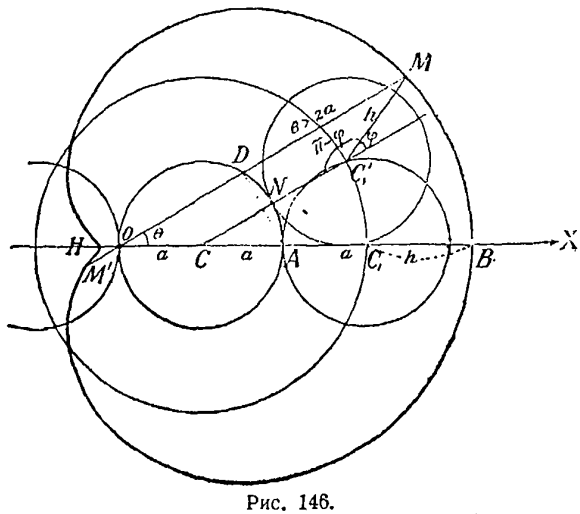


Рис. 146.

вают улитками Паскаля. Таким образом, улитка Паскаля представляет собой эпитрохоиду относительно кардиоиды (рис. 146 и 147) и, основываясь на этом, можно построить кривую по точкам. Однако, построение делается проще, если воспользоваться уравнением улитки в полярных координатах, которое имеет следующий вид:

$$r=2a\cos\varphi+b. \qquad (19)$$

Начало координат в точке O (рис. 146 и 147) — полярная ось X направлена к точке B кривой.

Построим окружность радиуса a и через точку O проводим линию ODM под углом φ к полярной оси OX; очевидно, что $OD=2a\cos\varphi$;

если от точки D отложить отрезок $OM=b=a+h$, то получим точку M, принадлежащую улитке. Отложив от точки D отрезок $DM'=b$ в противоположную сторону, получим точку M', тоже принадлежащую улитке.

Если $b>2a$, то получим кривую, показанную на рис. 146.

Если $b<2a$, то получим кривую, показанную на рис. 147. В этом случае в точке O кривая пересекает сама себя и получается двойная точка.

Когда $b=2a$, то получим рассмотренную выше кардиоиду, которую можно рассматривать, как частный случай улитки Паскаля.

Улитки Паскаля образуются движением концов некоторой прямой длиной $2b$, если середина ее описывает окружность радиуса a, причем эта прямая всегда проходит через неподвижную точку, лежащую на этой окружности (точка O, рис. 146 и 147).

в) Трисектрикс. Частный случай улитки при $b=a$ называется трисектрикс потому, что эта кривая служит для трисекции угла. Уравнение такой кривой в полярных координатах имеет вид:

$$r=a+2a\cos\varphi. \tag{20}$$

Чтобы разделить угол на три равные части помощью этой кривой, опишем окружность, радиус которой равен $a=OC$, а центр в точке O

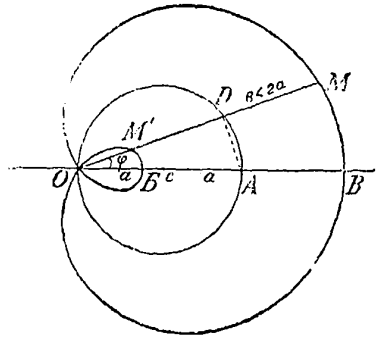


Рис. 147.

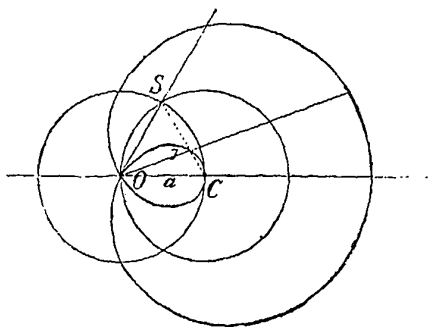


Рис. 148.

(рис. 148). Одну сторону угла направим по линии OC и заметим точку S пересечения другой стороны угла с окружностью радиуса OC. Точку I, в которой пересекается хорда SC с кривой, соединим с центром O. Угол $IOC=\frac{1}{3}$ угла SOC.

Если радиус основного круга $R=2a$, то получается эпициклоида показанная на рис. 149. Уравнение ее имеет в параметрической форме следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=3a\cos\theta-a\cos 3\theta\\ y&=3a\sin\theta-a\sin 3\theta \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Кривая состоит из двух дуг, симметрично расположенных относительно оси X. Очевидно также, что кривая симметрична относительно оси Y.

Эта эпициклоида представляет собой каустическую кривую, соответствующую случаю, когда лучи на сферическую поверхность падают параллельно, т. е. источник света находится в бесконечности.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Площадь кривой } S=12\pi a^2=3\pi R^2\\ &\text{Длина кривой } L=24a=12R \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Если $R=3a$, то получим так называемую Кремонскую эпициклоиду (кривая a, рис. 150). Параметрическое уравнение этой эпициклоиды имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4a\cos\theta - a\cos 4\theta \\ y &= 4a\sin\theta - a\sin 4\theta \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Кривая состоит из трех одинаковых дуг, расположенных на равных расстояниях по окружности основного круга. Соответствующие этой эпициклоиде эпитрохоиды — удлиненная (кривая b) и укороченная (кривая c) — указаны на рис. 150.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Площадь всей эпициклоиды } S = 20\pi a^2 = \frac{20}{9}\pi R^2 \\ &\text{Длина всей эпициклоиды } L = 24a = 8R \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

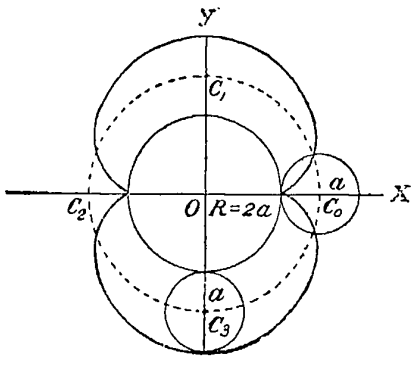


Рис. 149.

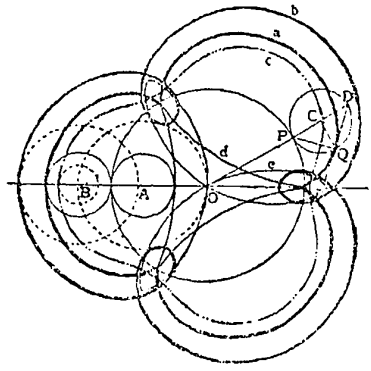


Рис. 150.

Если $R=4a$, то получим кривую (I), одна четверть которой представлена на рис. 141; уравнение этой эпициклоиды имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5a\cos\theta - a\cos 5\theta \\ y &= 5a\sin\theta - a\sin 5\theta \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Кривая состоит из четырех ветвей и общие точки ее сосновным кругом приходятся на пересечении с осями координат. Эпитрохоиды, соответствующие этой эпициклоиде, II и IV показаны на рис. 141.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Площадь всей эпициклоиды } S = 30\pi a^2 = \frac{15}{8}\pi R^2 \\ &\text{Длина всей кривой } L = 40a = 10R \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

1. Очевидно, что при $R=a$ гипоциклоида обращается в точку — центр основного круга.

2. Если $R=2a$, то соответствующая гипоциклоида обращается в диаметр неподвижного круга, что прямо видно из уравнения гипоциклоиды.

3. При $R=3a$ получим так называемую Кремонскую гипоциклоиду, состоящую из трех ветвей, общий вид которой показан на рис. 150 (кривая d).

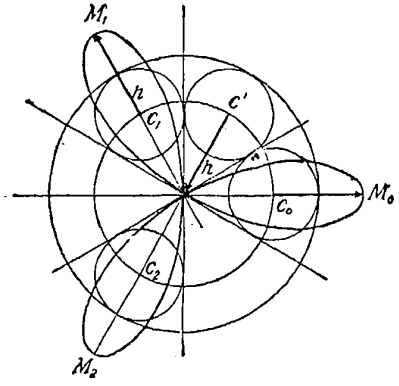


Рис. 151.

Уравнение такой гипоциклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos\theta + a\cos 2\theta \\ y &= 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Площадь } S_0 = \frac{\pi a^2}{3} \\ &\text{Длина } L_0 = \frac{8}{3}a \\ &\text{Вся площадь } S = 2\pi a^2 \\ &\text{Длина всей кривой } L = 16a \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Если для соответствующей гипотрохоиды принять $h=2a$, т. е. $m=2$, то получается кривая, состоящая из трех ветвей и называемая трилистник (кривая e, рис. 150 и 151), уравнение которой из (11) следует:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos\theta + 2a\cos 2\theta = 4a\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ y &= 2\sin\theta - 2a\sin 2\theta = -\,4a\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

или

$$x^2+y^2 = 16a^2\cos^2\frac{3\theta}{2} \quad (30)$$

или обычное полярное уравнение трилистника будет:

$$r = 4a\cos 3\varphi. \quad (31)$$

Площадь всех трех лепестков $S=24\pi a^2 = \frac{8}{3}\pi R^2$. (32)

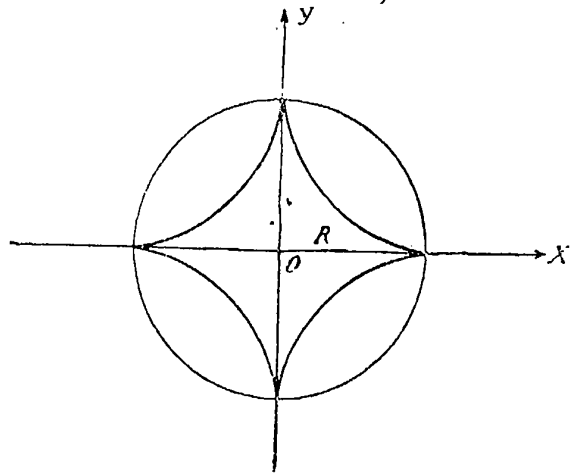


Рис. 152.

4. Если $R=4a$, то уравнение гипоциклоиды принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3a\cos\theta + a\cos 3\theta \\ y &= 3a\sin\theta - a\sin 3\theta \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

и кривая называется астроидой. Ее вид показан на рис. 152. Кривая состоит из четырех ветвей. На осях X и Y в пересечении с основным кругом радиуса $R=4a$ будут точки возврата кривой.

$$x = 3a\cos\theta + a(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 4a\cos^3\theta = R\cos^3\theta,$$
$$y = 3a\sin\theta - a(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 4a\sin^3\theta = R\sin^3\theta.$$

Возвышая оба выражения в степень $^2/_3$ и складывая, получим уравнение астроиды в алгебраической форме:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}. \tag{34}$$

Площадь астроиды $S=\frac{3}{8}\pi R^2$, т. е. равна $^3/_8$ площади неподвижного круга.

Длина дуги астроиды (четыре ветви) $L=6R$. (35)

Гипотрохоида, соответствующая этой кривой при $h=3a$, дает известную кривую, называемую четырехлистник; уравнение этой кривой в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x&=3a\cos\theta+3a\cos 3\theta=6a\cos 2\theta\cos\theta\\ y&=3a\sin\theta-3a\sin 3\theta=-6a\cos 2\theta\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

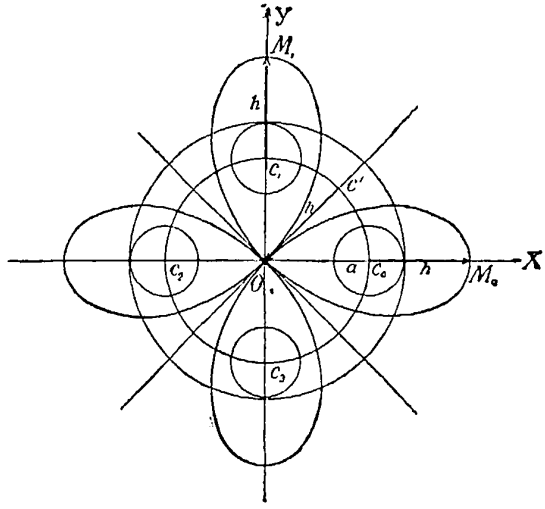


Рис. 152а.

поэтому в полярных координатах, имея в виду, что $\theta=\pi-\varphi$, уравнение будет:

$$r=6a\cos 2\varphi. \tag{37}$$

Кривая изображена на рис. 152а.

Площадь четырех лепестков $S=18\pi a^2$. (38)

§ 11. Развертка круга

Разверткой круга называется кривая, которую описывает конец M гибкой и нерастяжимой нити, постепенно сматывающейся с неподвижной окружности радиуса a (рис. 153).

Очевидно, что в точке K, где нить отделяется от окружности, она остается касательной к ней. Приняв угол $\theta=AOK$ за независимый параметр, получим уравнение развертки круга в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\theta+a\theta\sin\theta\\ y&=a\sin\theta-a\theta\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$y'=\operatorname{tg} t=\operatorname{tg}\theta,$$

То есть касательная MT к кривой в любой точке M параллельна радиусу OK, а касательная к кругу в точке K перпендикулярна к кривой в точке M, т. е. линия MK есть нормаль к развертке круга.

Уравнение в полярных координатах

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}. \qquad (2)$$

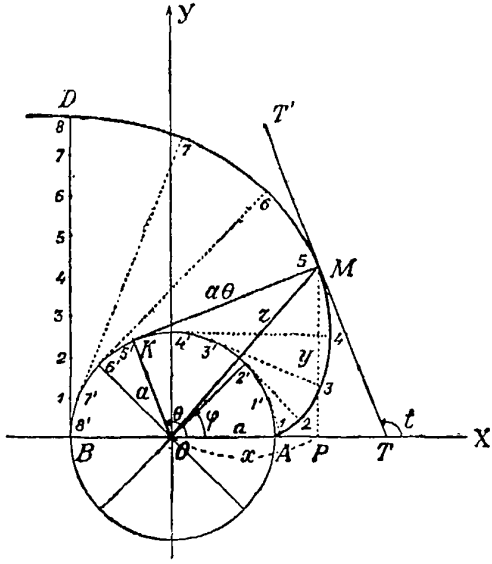


Рис. 153.

Радиус кривизны R в точке M равен длине касательной MK от точки M кривой до окружности основного круга, а также равен длине дуги $AK = a\theta$.

Длина дуги

$$\text{кривой } AM = s \qquad (3)$$

$$s = \frac{R^2}{2a} = \frac{a\theta^2}{2} = \frac{(r^2 - a^2)}{2a}. \qquad (4)$$

Площадь сектора AOM

$$S = \frac{1}{6} a^2\theta^3 = \frac{1}{3} s \cdot R = \text{площади } AKMA, \qquad (5)$$

заключенной между окружностью, разверткой и нормалью к развертке.

Построение кривой. Проводим линию BD перпендикулярно диаметру BA основного круга и откладываем отрезок BD, равный длине половины окружности BA. Делим отрезок BD на n частей (8 частей на рис. 153) и на столько же частей делим полуокружность AB. Через точки деления $1'$, $2'$, $3'$, $4'$... и т. д. проводим касательные, по которым откладываем длины $\overline{1'1} = \overline{B1}$, $\overline{2'2} = \overline{B2}$, $\overline{3'3} = \overline{B3}$ и т. д. Точки $1, 2, 3, \ldots$ соединяем согласной кривой, это и будет развертка круга.

§ 12. Спирали

1. Спираль Архимеда. Уравнение в полярных координатах

$$r = k\varphi, \qquad (1)$$

то есть спираль Архимеда есть кривая, которую описывает точка, движущаяся с постоянной линейной скоростью по радиусу-вектору, в то время как этот последний вращается с постоянной угловой скоростью вокруг полюса O. Если за полный оборот радиуса-вектора точка передвинется на величину $OA = a$, то

$$k = \frac{a}{2\pi}. \qquad (2)$$

Построение архимедовой спирали. Величину $OA = a$ (рис. 154) делим на n равных частей; описываем окружность радиусом a

и делим ее тоже на n (12) частей; проводим радиусы через указанные деления окружности и откладываем по каждому из них длину, соответствующую делению начального радиуса OA.

$$\text{Полярная подкасательная } OT_0 = \frac{r^2}{k}. \tag{3}$$

$$\text{Полярная поднормаль } ON_0 = k = \text{постоянная}. \tag{4}$$

Это свойство спирали дает простой способ построения нормали и касательной в любой точке M на кривой. Опишем окружность радиусом $OH = k$ и заметим точку N_0 пересечения радиуса-вектора, перпендикулярного к OM. Тогда MN_0 есть направление нормали, а $MT_0 \perp MN_0$ — касательная.

$$\text{Радиус кривизны } R = \frac{(k^2 + r^2)^{3/2}}{2k^2 + r^2} = \frac{k(1+\varphi^2)^{3/2}}{(2+\varphi^2)}. \tag{5}$$

$$\text{Угол } \mu = OMT_0 = \operatorname{arc\,tg}\varphi. \tag{6}$$

$$\text{Длина дуги } s = OHM = \frac{k}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{Arsh}\varphi\right). \tag{7}$$

Для отрицательных значений угла φ архимедова спираль представляет собой зеркальное изображение (рис. 154) относительно линии $OL \perp OX$.

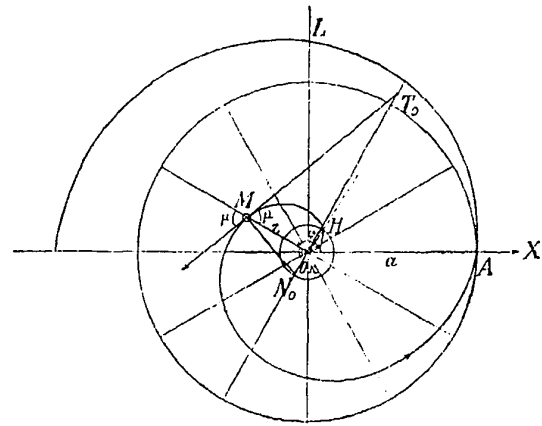


Рис. 154.

2. Гиперболическая спираль. Уравнение спирали

$$r\varphi = a. \tag{8}$$

Кривая начинается в точке, бесконечно удаленной от полюса, и постепенно приближается к нему, однако достигая его только в пределе при $\varphi = \infty$.

Прямая BB_1, параллельная полярной оси OX и расположенная в расстоянии a от нее, представляет собой асимптоту этой спирали (рис. 155).

Построение кривой делается проще всего по точкам, вычисляя r для разных значений φ через некоторый удобный интервал, например через $15° = 0{,}2618$ радиана. Угол $\mu = -\operatorname{arc\,tg}\varphi$.

Полярная подкасательная $OT_0 = -a$ постоянной. Это свойство дает простой способ построения касательной, очевидный из рис. 155.

$$\text{Полярная поднормаль } ON_0 = -\frac{r^2}{a} = -\frac{a}{\varphi^2}. \tag{9}$$

$$\text{Радиус кривизны } R = r\left(\frac{r^2}{a^2} + 1\right)^{3/2}. \tag{10}$$

Графически центр кривизны P получается таким построением: через точку N_0 проводят перпендикуляр к линии MN_0 до пересечения в Q с продолжением радиуса-вектора MO точки M. В точке Q

восстанавливают перпендикуляр к линии MO и замечают точку P на продолжении линии MN_0. Точка P и есть центр кривизны гиперболической спирали в точке M. Для отрицательных значений углов φ

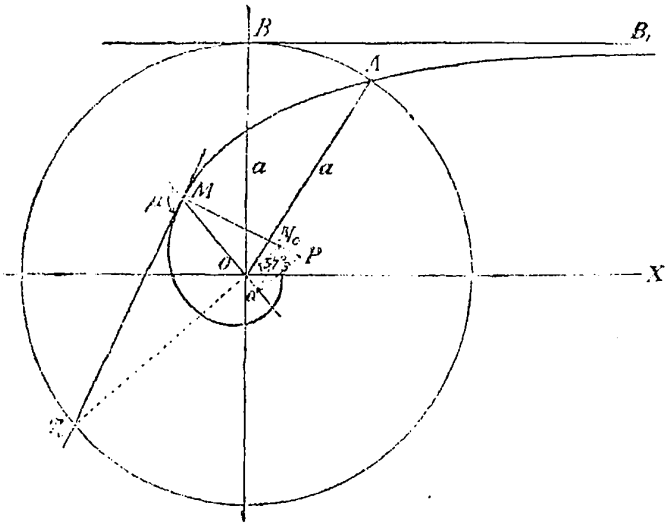


Рис. 155.

гиперболическая спираль представляет собой зеркальное изображение кривой для положительных значений φ относительно $OB \perp OX$.

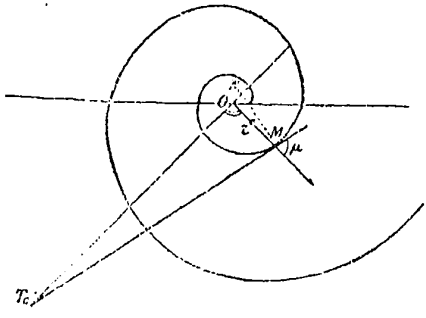


Рис. 156.

3. Логарифмическая спираль. Уравнение спирали

$$r = ae^{m\varphi}. \qquad (11)$$

Параметр a есть радиус-вектор спирали при $\varphi = 0$. Параметр m определяет форму кривой и скорость увеличения радиуса-вектора; m может быть положительное (рис. 156), отрицательное число или нуль. В последнем случае спираль обращается в окружность радиуса a. При φ отрицательном и стремящемся к ∞ радиус-вектор $\to 0$, поэтому полюс O есть асимптотическая точка.

Касательная MT_0 составляет с радиусом-вектором постоянный угол μ, определяемый величиной m

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m} \qquad (12)$$

$$\text{или } \mu = \operatorname{arc\,ctg} m. \qquad (12)^*$$

При $m > 1$ $\mu < \frac{\pi}{4}$; при $m < 1$ $\mu > \frac{\pi}{4}$.

Полярная подкасательная $OT_0 = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{m}$. (13)

Полярная поднормаль $ON_0 = r\operatorname{ctg}\mu = rm.$ (14)

Полярная нормаль $MN_0 = r\sqrt{1+m^2} = \frac{r}{\sin\mu}.$ (15)

Радиус кривизны $R = MN_0 =$ полярной нормали. (16)

Полярная касательная $MT_0 = \frac{r}{\cos\mu} = \frac{r\sqrt{1+m^2}}{m}$ (17)

На рис. 157 показаны четыре логарифмических спирали, у которых параметры m соответственно равны $m = 0{,}2$, 0,5, 0,8 и 1,5 при одинаковом значении параметра a. При отрицательном значении параметра m кривая будет симметрична относительно полярной оси OX, так что радиус-вектор будет стремиться к нулю при положительном изменении угла φ.

Если параметры a и a_1 у двух спиралей различны, а параметр m одинаков, то такие спирали геометрически равны и могут быть совмещены поворотом одной из них вокруг полюса O на угол $\frac{1}{m}\ln\left(\frac{a_1}{a}\right)$.

Длина дуги l логарифмической спирали соответственно двум углам φ_1 и φ_2 равна:

$$l = \sec\mu(r_2 - r_1) = \frac{a\left(e^{m\varphi_2} - e^{m\varphi_1}\right)}{\cos\mu}. \quad (18)$$

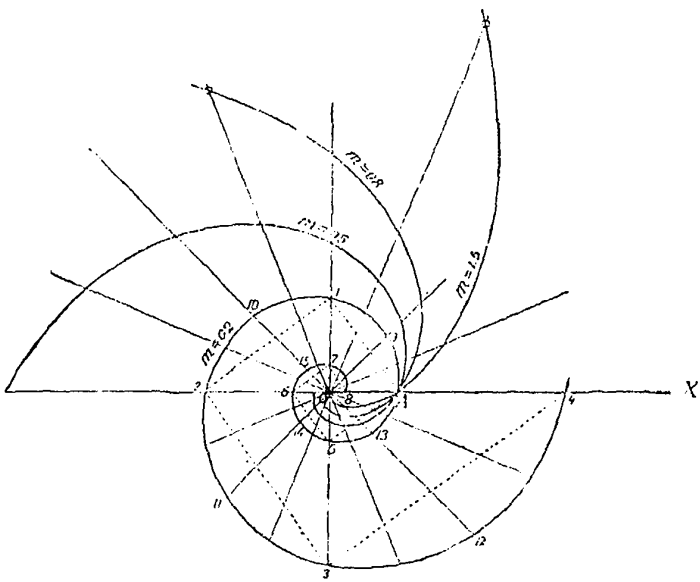


Рис. 157.

В пределе, когда точка $(r_1\varphi_1)$ приближается к полюсу, длина дуги от точки $(r_2\varphi_2)$ до полюса стремится к пределу

$$L = \frac{r_2}{\cos\mu}. \quad (19)$$

Построение логарифмической спирали можно выполнить по точкам, вычисленным следующим путем: задавая угол φ, например через $22^1/_2{}^\circ = \frac{\pi}{8} = 0{,}393$, находим произведения $m\varphi$ при задан-

ной величине m; сообразно этим значениям показателей находим величины $e^{m\varphi}$ и $e^{-m\varphi}$; умножая найденные величины на параметр a, получим радиусы-векторы r, соответствующие углам φ.

Вычисления, относящиеся к построению спирали для $m = \pm 0{,}2$ (при целом обороте), приведены ниже в таблице, составить которую помощью таблицы показательной функции e^x (таблицы натуральных антилогарифмов) не представляет труда. Если такой таблицы нет, то с помощью величин $m\varphi$, величины $e^{m\varphi}$ и $e^{-m\varphi}$ получаются как сказано в главе 5, § 8 стр. 179.

φ^0	φ	$m\varphi$ $(m=0{,}2)$	$e^{+m\varphi}$	$e^{-m\varphi}$
0°	0,000	0,000	1,000	1,000
22½	0,393	0,078₅	1,082	0,925
45	0,785	0,157	1,170	0,855
67½	1,178	0,236	1,265	0,790
90	1,571	0,314	1,369	0,731
112½	1,963	0,393	1,481	0,675
135	2,356	0,471	1,602	0,624
157½	2,749	0,550	1,733	0,577
180	3,142	0,628	1,874	0,534
202½	3,534	0,707	2,028	0,493
225	3,927	0,785	2,192	0,456
247½	4,320	0,864	2,373	0,422
270	4,712	0,942	2,565	0,390
292½	5,105	1,021	2,776	0,360
315	5,498	1,100	3,004	0,333
337½	5,890	1,178	3,248	0,308
360	6,283	1,257	3,514	0,283

Радиусы-векторы r можно вычислить, наконец, так: обозначая через $2n$ число, показывающее на сколько частей разделена окружность, можно написать, что

$$r = ae^{m\frac{2\pi}{2n}k};$$

так как $e^{\frac{2m\pi}{2n}} = \beta$ есть величина постоянная, то

$$r_k = a\beta^k, \qquad (20)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$.

В случае, если $m = 0{,}2$, $n = 8$, то $\beta = 1{,}0818$ и

$$r_k = a(1{,}0818)^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 16).$$

Вычисление разных значений r_k по этой формуле не представляет труда.

Можно строить точки спирали графически, применяя метод графического умножения, указанный в главе 2, § 9. Для этого вычисляем значение r_0 при $k = 0$ и r_4 при $k = 4$, т. е. для $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и получим точки A и *1*; проводя перпендикулярную линию к *1A* через точку *1* и заметив пересечение ее с линией $\varphi = \pi$, получим точку *2*. Проводя прямую *2—3* перпендикулярно к линии *2—1* через точку *2*, найдем точку *3*. Далее получим точку *4* и т. д. Точки *5*, *6*,

7, *8* получаются тем же путем, но проводя перпендикуляры в сторону уменьшающихся углов φ. Таким же приемом получаются точки *9*, *10*, *11*, *12*, *13*, *14*, *15* и *16*.

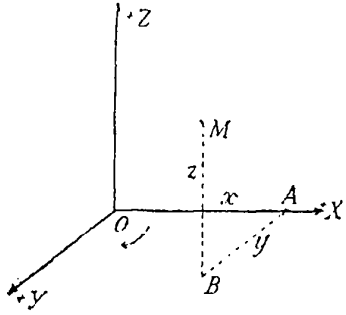
Понятно, что графическое последовательное построение точек менее точно, чем построение их независимо вычислением радиусов-векторов.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 13. Различные системы координат для определения положения точки в пространстве

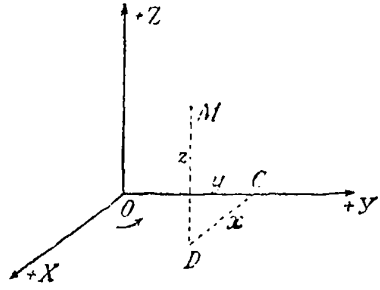
1. Прямолинейные координаты. Положение точки M (рис. 158) в пространстве можно определить по отношению к системе координат $OXYZ$ прямоугольными координатами $x=OA$; $y=AB$ и $z=BM$, параллельными соответствующим осям. Иногда вместо прямоугольной системы координатных осей применяют косоугольную.

По каждой из осей координат OX, OY и OZ условимся считать положительные направления в одну сторону, а отрицательные направления в противоположную сторону.



(левая)

Рис. 158.



(правая)

Рис. 159.

Различают два рода систем: правую и левую. В правой системе вращение оси $+X$ к оси $+Y$ вокруг оси Z кратчайшим путем происходит против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего из той точки пространства, где x, y и z положительны (рис. 159). В левой системе указанное вращение происходит по часовой стрелке (рис. 158). Правую систему называют также английской или астрономической, левую — французской или геодезической. Параллельно осям XYZ правой системы можно направить соответственно большой, указательный и средний пальцы правой руки и наоборот. Очевидно, что правую и левую системы никогда нельзя совместить одноименными осями. Координатные плоскости XOY, XOZ и ZOY разделяют все пространство на 8 четвертей или октантов. Правило для знаков координат дает возможность однозначно определить положение точки M в пространстве, давая каждой из трех координат x, y и z определенный знак $+$ или $-$, сообразно тому, в направлении положительной или отрицательной оси x, y и z находится точка M.

Если через точку M провести плоскости, параллельные плоскостям координат (рис. 160), то получим параллелепипед $OAB\ldots DFEM$, ребра которого, параллельные соответствующим осям координат, равны координатам x, y и z точки M.

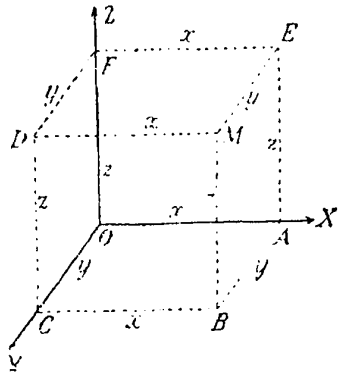


Рис. 160.

2. Полярные, или сферические, координаты. Положение точки M в пространстве может быть определено полярными или сферическими координатами (ρ, φ и ϑ).

Плоскость $ONMB$, в которой располагается радиус-вектор ρ, определяющий расстояние точки M от начала координат, сама определяется одним углом $\lambda = AOB$, представляющим двугранный угол между указанной плоскостью и координатной плоскостью ZOX. В плоскости $ONMB$ направление радиуса-вектора $OM = \rho$ определяется углом $\varphi = MOB$ или дополнением его до $\frac{\pi}{2}$ углом $\vartheta = NOM$. В геодезии и астрономии угол φ называют широтой, угол λ — долготой.

Чтобы точка M в пространстве была определена однозначно, необходимо условиться относительно счета углов φ и λ. Угол λ считают от 0 до 2π в одном направлении от $+X$ через $+Y$ до $+X$. Угол φ считают положительным в сторону к положительной оси Z от 0 до $+\pi/2$ и отрицательным от 0 до $-\pi/2$ в направлении к отрицательной оси Z. Радиус-вектор ρ считается всегда величиной существенно положительной и изменяется от 0 до ∞. Если вместо широты φ рассматривать угол ϑ, называемый полярным расстоянием, то этот угол следует считать от 0 до π в направлении от положительной оси Z к отрицательной оси Z. При этих условиях положение точки M определится всегда однозначно.

Зависимость между полярными и прямоугольными координатами выражается следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= \rho\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\lambda &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \rho^2 &= x^2+y^2+z^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

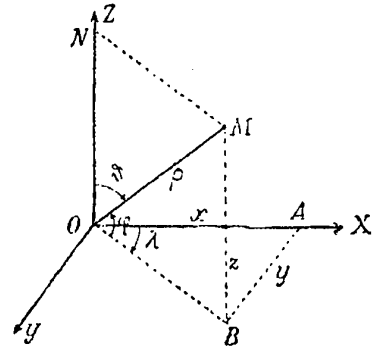


Рис. 161.

Формулы (1) служат для перехода от полярных координат к прямоугольным, а (2) служат для обратного перехода от прямоугольных к полярным (сферическим).

В системе сферических координат может быть два варианта: правая и левая системы. В левой системе (рис. 161) угол λ возрастает от 0 до 2π по стрелке часов, если смотреть с положительной стороны оси Z; в правой, наоборот, против стрелки часов.

3. **Полярно-цилиндрические координаты.** Положение точки M в пространстве может быть определено еще третьим методом — помощью полярно-цилиндрических координат r, λ и z следующим образом: проведем через точку M прямую, параллельную оси Z, и заметим точку B пересечения ее с плоскостью XOY. Соединим точку B с началом координат O и угол BOX обозначим через λ. Как и в системе сферических координат этот угол λ называют долготой. Расстояние $OB=r$ есть радиус-вектор на плоскости XOY. Таким образом, величинами λ, r и z положение точки M определяется вполне, если условиться угол λ считать от 0 до 2π, как сказано выше; r считать всегда величиной положительной и изменяющейся от 0 до ∞; координату z считать положительной в направлении по оси $+Z$ и отрицательной для обратного направления.

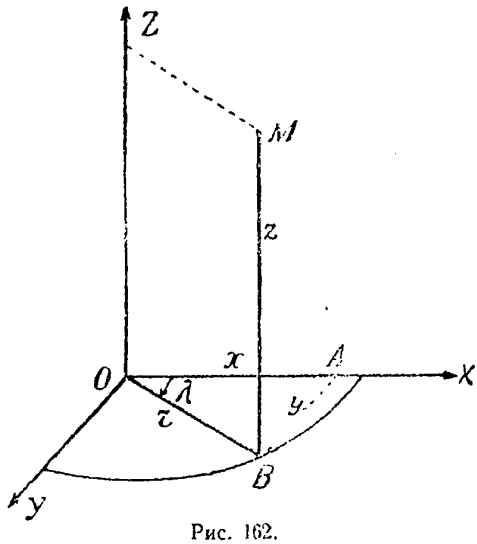


Рис. 162.

Зависимость между прямоугольными и полярно-цилиндрическими координатами устанавливается по рис. 162 такая:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\lambda \\ y &= r\sin\lambda \\ z & \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и обратно

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ \operatorname{tg}\lambda &= \frac{y}{x} \\ z & \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

§ 14. Плоскость

1. Положение плоскости N (рис. 163) в пространстве будет вполне определено, если зададим ее расстояние p от начала O, т. е. зададим длину перпендикуляра $OT=p$, опущенного из точки O на плоскость N, и единичный вектор (орт) $\bar{n}^\circ$, перпендикулярный к плоскости и обращенный от начала O к плоскости N. Этот единичный вектор $\bar{n}^\circ$ (орт) назовем направляющим вектором плоскости.

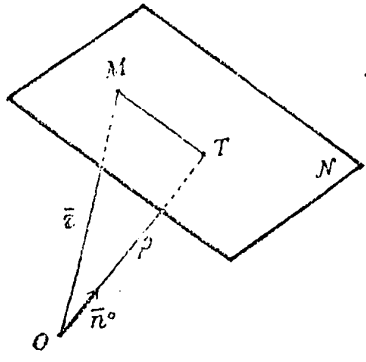


Рис. 163.

Положение любой точки M, принадлежащей плоскости N, определится вполне радиусом-вектором $\overline{OM}=\bar{r}$ этой точки, но очевидно, что для любой точки M плоскости N проекция радиуса-вектора $\overline{OM}$ на направление единичного вектора $\bar{n}^\circ$ равна всегда постоянной величине

$OT=p$; таким образом, уравнение плоскости N в векторной форме будет иметь вид:

$$(\bar{r}\,\bar{n}^{\circ})=p. \tag{1}$$

Чтобы от векторной формы перейти к скалярным выражениям, заметим, что проекции единичного вектора $\bar{n}^{\circ}$ на оси координат равны cos-ам углов, образуемых направлением орта $\bar{n}^{\circ}$ с осями координат, т. е. равны $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, а проекции вектора $\overline{OM}=\bar{r}$ равны координатам x, y и z точки M, поэтому на основании выражения скалярного произведения векторов, заданных проекциями (отдел II, глава 3), найдем:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{2}$$

уравнение плоскости в так называемой нормальной форме.

Cos-ы углов направляющего вектора связаны между собой таким образом:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{3}$$

а $p\geqslant 0$.

Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{4}$$

т. е. всякая плоскость изображается уравнением первой степени относительно координат и наоборот, всякое уравнение первой степени относительно координат представляет плоскость.

Уравнение

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{q}=1 \tag{5}$$

есть уравнение плоскости „в отрезках“ или „по отрезкам“, так как m, n и q — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат. Cos-ы углов направляющего вектора связаны с коэфициентами A, B и C следующим образом:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\qquad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Расстояние p от начала координат до плоскости

$$p=\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{6}$$

так как p в уравнении (2) $\geqslant 0$, то знак $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (нормирующий множитель данного уравнения (4)) должен быть взят противоположный знаку D в уравнении (4).

Уравнение $2x-2y+z-3=0$, данное в форме (4), в нормальном виде должно быть написано:

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-1=0,$$

так как нормирующий множитель равен $\sqrt{4+4+1}=+3$, а знак у D отрицательный.

Если $p=0$, значит плоскость проходит через начало координат и ее уравнение

$$Ax+By+Cz=0. \tag{7}$$

Уравнение плоскости, параллельной одной из осей координат, не содержит соответственной буквы

$$\left.\begin{array}{ll} \text{пл. } \| \text{ оси } X & By+Cz+D=0 \\ \text{пл. } \| \text{ оси } Y & Ax+Cz+D=0 \\ \text{пл. } \| \text{ оси } Z & Ax+By+D=0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Уравнение плоскости, проходящей через одну из осей, не содержит соответственной буквы и свободного члена (проходит через начало координат), т. е. для плоскости

$$\left.\begin{array}{lll} \text{проходящей через ось } X & & By+Cz=0 \\ \text{„ } \quad \text{„ } \quad \text{„ } & Y & Ax+Cz=0 \\ \text{„ } \quad \text{„ } \quad \text{„ } & Z & Ax+By=0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Уравнение плоскости, параллельной координатным плоскостям

$$\begin{array}{lll} \text{пл. } \| \text{ плоскости } & YOZ & x=a \\ \text{пл. } \| \quad \text{„ } & XOZ & y=b \\ \text{пл. } \| \quad \text{„ } & XOY & z=c \end{array}$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_1y_1z_1)$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{10}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$, $M_3(x_3y_3z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & , & x_2-x_1 & , & x_3-x_1 \\ y-y_1 & , & y_2-y_1 & , & y_3-y_1 \\ z-z_1 & , & z_2-z_1 & , & z_3-z_1 \end{vmatrix} =0. \tag{11}$$

4. Угол между двумя плоскостями

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{12}$$

5. Условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{13}$$

6. Условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{14}$$

7. Плоскость, проходящая через точку $M_1(x_1y_1z_1)$ и параллельная заданной плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0. \tag{15}$$

8. Плоскость, проходящая через две точки $M_1(x_1y_1z_1)$ и $M_2(x_2y_2z_2)$ и перпендикулярная к данной плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & , & y-y_1 & , & z-z_1 \\ x_2-x_1 & , & y_2-y_1 & , & z_2-z_1 \\ A_1 & , & B_1 & , & C_1 \end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

9. Расстояние l от точки $M(x_1y_1z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ (положительное, когда точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости)

$$l=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{17}$$

Если уравнение плоскости задано в нормальной форме, то

$$l=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p. \tag{18}$$

Расстояние точки (*1, 2, 3*) от плоскости

$$2x-2y+z-3=0 \tag{*}$$

равно

$$l=\frac{2\times1-2\times2+1\times3-3}{+\sqrt{9}}=-\frac{2}{3}.$$

Если уравнение (*) написать в нормальной форме (2)

$$x\frac{2}{3}-y\frac{2}{3}+z\frac{1}{3}-1=0,$$

то

$$l=\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{3}\times2+\frac{1}{3}\times3-1=-\frac{2}{3}.$$

Знак — показывает, что точка (*1, 2, 3*) и начало координат лежат по одну сторону плоскости (*).

10. Объем тетраедра V по координатам вершин $M(x, y, z)$, $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$ и $M_3(x_3y_3z_3)$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1, & x & y & z \\ 1, & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1, & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1, & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приравняв это выражение нулю, получим уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3.

§ 15. Прямая линия

1. Положение прямой линии в пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой линии некоторую точку M_0, при помощи ее радиуса-вектора $\vec{r_0}$, и вектор $\vec{s}$, которому прямая параллельна

(рис. 164). Переменной точке M прямой линии соответствует ее радиус-вектор $OM=\bar{r}$ и векторное выражение

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{s}t \tag{19}$$

представляет собой уравнение прямой линии в векторной форме. Заметим, что вектор $\overline{M_0M}=\bar{s}t$ параллелен вектору $\bar{s}$. Скалярная величина t может принимать любые значения, в зависимости от положения точки M. Величина t играет поэтому роль параметра.

2. Уравнение прямой линии в проекциях

$$\left.\begin{aligned} x&=a+mt\\ y&=b+nt\\ z&=c+pt \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

a, b, c — проекции радиуса-вектора $\bar{r}_0$
m, n, p — „ вектора $\bar{s}$
} на оси координат

x, y, z — координаты точки M.

Величины m, n и p называются угловыми коэфициентами прямой. Если $\bar{s}^\circ$ есть единичный вектор вектора $\bar{s}$, то m, n и p обращаются в cos-ы углов α, β и γ, составляемых направлением $\bar{s}^\circ$ с осями координат, а параметр t обращается в расстояние MM_0, т. е. означает переменное расстояние точки M от M_0 со знаком + или —, в зависимости от того, будет ли направлен вектор $\overline{M_0M}$ одинаково или противоположно направлению вектора $\bar{s}^\circ$ ($\overline{M_0M}=\bar{s}^\circ t$).

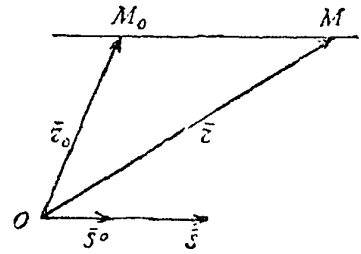


Рис. 164.

Тогда уравнения (19) и (20) принимают вид:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{s}_0t \tag{19}^*$$

$$\left.\begin{aligned} x&=a+\cos\alpha\cdot t\\ y&=b+\cos\beta\cdot t\\ z&=c+\cos\gamma\cdot t \end{aligned}\right\} \tag{20}^*$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{m}{s}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\beta&=\frac{n}{s}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{p}{s}=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

s — длина вектора $\bar{s}$, т. е. $\bar{s}=\bar{s}^\circ\cdot s$.

3. Уравнение прямой в нормальной форме

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}. \tag{22}$$

Уравнение прямой в канонической форме

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \qquad (22)^*$$

4. Уравнение прямой в проекциях на плоскостях координат

$$x=Mz+x_0, \quad y=Nz+y_0 \qquad (23)$$

$$M=\frac{m}{p}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}; \quad N=\frac{n}{p}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}; \quad x_0=a-\frac{mc}{p}, \quad y_0=b-\frac{nc}{p}.$$

5. Уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Решая уравнения (24) относительно x и y, получим равносильную систему (23) в проекциях на плоскостях координат.

6. Угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \quad \text{и} \quad \frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}$$

$$\cos\varphi=\frac{mm'+nn'+pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}=$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma', \qquad (25)$$

где α, β, γ и α', β', γ' — углы между прямыми и осями координат.

7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых:

$$\left.\begin{aligned} &mm'+nn'+pp'=0 \\ &\text{или} \\ &\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'=0 \end{aligned}\right\} \text{условие перпендикулярности} \qquad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}=k \\ &\text{или} \\ &\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}=k \end{aligned}\right\} \text{условие параллельности} \qquad (27)$$

8. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $(x_1y_1z_1)$ параллельно заданной прямой

$$\frac{x-a'}{m}=\frac{y-b'}{n}=\frac{z-c'}{p}$$

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad (28)$$

9. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$(x_1y_1z_1) \quad \text{и} \quad (x_2y_2z_2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (29)$$

10. Расстояние s между двумя точками $M_1(x_1y_1z_1)$ и $M_2(x_2y_2z_2)$

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

§ 16. Прямая и плоскость

1. Угол φ между прямой и плоскостью:

прямая $$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p};$$

плоскость $$Ax+By+Cz+D=0;$$

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{30}$$

2. Условие параллельности и перпендикулярности прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ условие параллельности} \tag{31}$$

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \text{ условие перпендикулярности.} \tag{32}$$

3. Общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую. Пусть

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{и} \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

данные плоскости, пересечение которых определяет данную прямую. Общее уравнение плоскостей, проходящих через ту же прямую, будет:

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0; \tag{33}$$

при λ неопределенном это уравнение представляет пучок плоскостей проходящих через заданную прямую. Численное значение λ определяется вполне координатами точки $M_1(x_1y_1z_1)$, не лежащей на заданной прямой.

4. Точка пересечения прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

где
$$\left.\begin{gathered} x=a+mt \qquad y=b+nt \qquad z=c+pt \\ t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp} \end{gathered}\right\} \tag{34}$$

Если

$$Am+Bn+Cp=0, \text{ а } Aa+Bb+Cc+D\neq 0,$$

то имеем найденное выше условие параллельности (31).

Если же

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ и } Aa+Bb+Cc+D=0,$$

то заданная прямая лежит в данной плоскости.

5. Условие, при котором две прямые

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$$

лежат в заданной плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$(np_1-n_1p)(a-a_1)+(pm_1-p_1m)(b-b_1)+(mn_1-m_1n)(c-c_1)=0 \quad (35)$$

или в форме определителя

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & , & b-b_1 & , & c-c_1 \\ m & , & n & , & p \\ m_1 & , & n_1 & , & p_1 \end{vmatrix}=0. \quad (35)^*$$

§ 17. Преобразование координат

А. Новое начало O_2 направление новых осей $O_2X_2Y_2Z_2$ параллельно прежним $O_1X_1Y_1Z_1$

$$x_1=x_2+a; \quad y_1=y_2+b; \quad z_1=z_2+c, \quad (1)$$

где a, b, c — координаты нового начала O_2 в старой системе.

Б. Новое направление осей, начало прежнее

$OX_1Y_1Z_1$ — прежняя (первая) система
$OX_2Y_2Z_2$ — новая (вторая) система

(рис. 165), обе ортогональные.

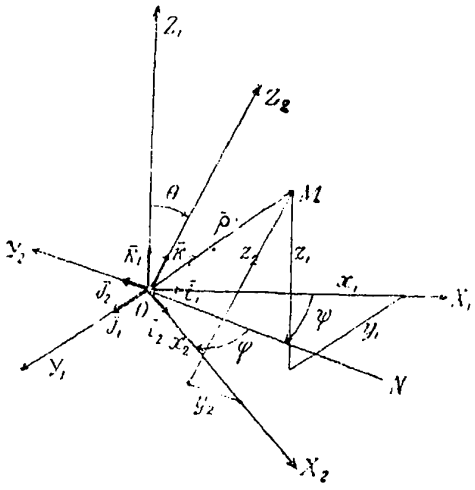


Рис. 165.

Пусть косинусы углов, которые составляют новые оси $X_2Y_2Z_2$ со старыми $X_1Y_1Z_1$, представлены в нижеследующей табличке

новые \ старые	X_1	Y_1	Z_1
X_2	α_1	α_2	α_3
Y_2	β_1	β_2	β_3
Z_2	γ_1	γ_2	γ_3

(2)

Зависимость между старыми координатами $(x_1y_1z_1)$ какой-нибудь точки M пространства и новыми $(x_2y_2z_2)$ устанавливается следующим путем. Обозначим через ρ радиус-вектор этой точки M, а через $\bar{i}_2$, $\bar{j}_2$ и $\bar{k}_2$ орты новых осей X_2, Y_2 и Z_2, тогда (отд. II, гл. 3, § 2, п. 10)

$$\bar{\rho}=x_2\bar{i}_2+y_2\bar{j}_2+z_2\bar{k}_2; \quad (3)$$

проектируя обе части векторного равенства (3) на оси старых координат, получим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2 \\ y_1 &= \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 z_2 \\ z_1 &= \alpha_3 x_3 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 z_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Для обратного перехода от старых координат к новым обозначим через $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$ и $\bar{k}_1$ орты старых осей координат, тогда

$$\bar{\rho} = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1 \quad (5)$$

и, проектируя обе части векторного равенства (5) на новые оси координат, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 \\ y_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1 \\ z_2 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Все девять косинусов углов (2) связаны следующими шестью соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Поэтому девять косинусов каждого из углов новых осей со старыми должны удовлетворять шести указанным соотношениям (7) и (8), а следовательно, эти девять косинусов зависят от трех независимых косинусов углов, но вместо названных углов все девять косинусов выражают через три независимых параметра, которыми служат обычно три эйлеровых угла, о чем будет речь ниже.

Так как α_1, β_1, γ_1 являются cos-ми углов, составляемых старой осью X_1 с новыми осями X_2, Y_2 и Z_2, α_2, β_2, γ_2 — cos-ми углов, составляемых старой осью Y_1 с новыми и α_3, β_3, γ_3 — cos-ми углов между старой осью Z_1 и новыми осями, то все указанные девять косинусов удовлетворяют, вследствие ортогональности осей обеих систем, еще и следующим шести условиям:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (7)^*$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)^*$$

В. Новое начало O_2 и новое направление осей

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2 \\ y_1 &= b + \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 z_2 \\ z_1 &= c + \alpha_3 x_3 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 z_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \alpha_1(x_1 - a) + \alpha_2(y_1 - b) + \alpha_3(z_1 - c) \\ y_2 &= \beta_1(x_1 - a) + \beta_2(y_1 - b) + \beta_3(z_1 - c) \\ z_2 &= \gamma_1(x_1 - a) + \gamma_2(y_1 - b) + \gamma_3(z_1 - c) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где a, b, c — координаты нового начала O_2 в старой системе. Направления новых осей X_2, Y_2 и Z_2 определяются углами, данными в таблице (2) относительно прежних осей.

Примечание. Формулы перехода координат приведены здесь аналогично тому, как принято в аналитической механике; тогда прежние оси X_1, Y_1 и Z_1 представят неподвижные оси, а новые X_2, Y_2 и Z_2 — подвижные оси, связанные с данной движущейся системой.

Кроме соотношений (7), (8) и (7)*, (8)* будут существовать еще следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \\ \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 \\ \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \\ \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 \\ \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

которые являются следствием предыдущих.

§ 18. Формулы Эйлера

Выше было указано, что девять косинусов направляющих углов новых осей координат по отношению к старым осям связаны шестью соотношениями, а потому независимых параметров, определяющих расположение новых осей относительно старых, будет только три. Эти три параметра представляют собой три эйлеровых угла, через которые можно выразить все девять упомянутых выше косинусов углов.

Пусть триедр $OX_1Y_1Z_1$ (рис. 165) представляет старую прямоугольную систему, а $OX_2Y_2Z_2$ — новую одноименную с первой, т. е. обе системы левые или обе правые. Условимся поворот на некоторый угол вокруг какой-нибудь оси считать положительным, если для наблюдателя, стоящего вдоль по этой оси, головой в направлении положительной стороны ее, поворот происходит от левой руки к правой.

Пусть плоскость X_1OY_1 пересекается с плоскостью X_2OY_2 по прямой ON. Обозначим угол X_1ON через ψ, угол NOX_2 через φ, а угол взаимного наклона этих плоскостей X_1OY_1 и X_2OY_2, равный углу между осями OZ_1 и OZ_2, обозначим через θ. Эти три угла ψ, φ и θ и есть те эйлеровы углы, которые определяют расположение новых осей $OX_2Y_2Z_2$ относительно старых $OX_1Y_1Z_1$. Для полной определенности условимся угол θ считать от оси Z_1 и оси Z_2 от 0 до π, углы ψ и φ будем считать от 0 до 2π влево для левой системы и вправо для

правой. Формулы Эйлера, выражающие направляющие косинусы α_1, α_2 ... γ_3, γ_8 через эйлеровы углы ψ, φ и θ, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta \\
\alpha_2 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta \\
\alpha_3 &= \sin\varphi\sin\theta \\
\beta_1 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta \\
\beta_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta \\
\beta_3 &= \cos\varphi\sin\theta \\
\gamma_1 &= \sin\psi\sin\theta \\
\gamma_2 &= -\cos\psi\sin\theta \\
\gamma_3 &= \cos\theta
\end{aligned}\right\}$$

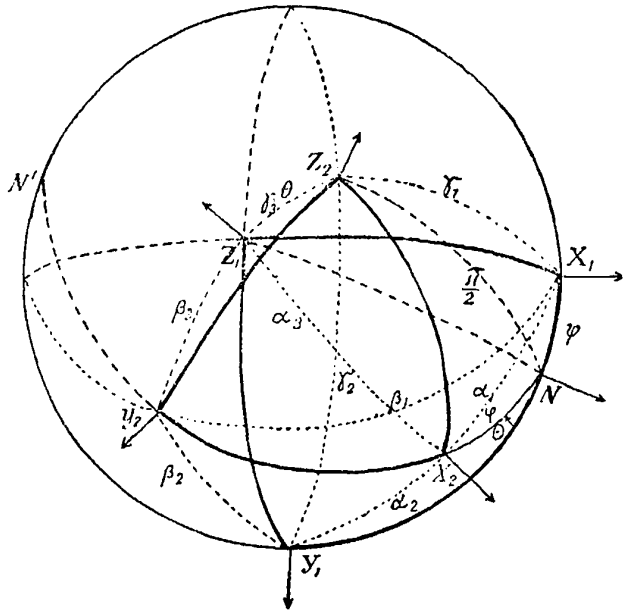


Рис. 166.

Для большей наглядности изобразим рис. 165 на вспомогательной небесной сфере (рис. 166), для чего опишем сферу радиусом, равным 1, вокруг начала координат O и рассмотрим ту половину ее, которая приходится в направлении положительной оси Z_1.

Пересечение осей начального триедра координат даст точки X_1, Y_1 и Z_1, и для простоты рисунка вообразим, что плоскость X_1OY_1 совпадает с плоскостью рис. 166. Точка Z_1, изображающая ось OZ, будет полюсом большого круга X_1Y_1. Пересечение осей нового триедра координат даст на поверхности сферы точки X_2, Y_2 и Z_2. Координатная плоскость X_2OY_2 изобразится на сфере большим кругом и точка N представит собой линию ON пересечения плоскостей X_1OY_1 и X_2OY_2. Тогда, очевидно, дуга $X_1N=\psi$, дуга $NX_2=\varphi$, угол θ — есть дуга Z_1Z_2 или угол X_2NY_1.

Соединив точку X_1 с X_2, Y_2 и Z_2 дугами больших кругов, увидим, что

$$\alpha_1 = \cos(X_1X_2); \quad \beta_1 = \cos(X_1Y_2); \quad \gamma = \cos(X_1Z_2).$$

Таким же образом, соединив точки Y_1 и Z_1 с X_2, Y_2 и Z_2 дугами больших кругов, найдем, что

$$\alpha_2 = \cos(Y_1X_2); \quad \beta_2 = \cos(Y_1Y_2); \quad \gamma_2 = \cos(Y_1Z_2);$$
$$\alpha_3 = \cos(Z_1X_2); \quad \beta_3 = \cos(Z_1Y_2); \quad \gamma_3 = \cos(Z_1Z_2).$$

На рис. 166 указанные дуги проведены пунктиром. Рассматривая сферический треугольник X_1NX_2, видим, что в нем известны три стороны $X_1N = \psi$, $X_2N = \varphi$ и угол $X_1NX_2 = \pi - \theta$. Тогда формула cos-а стороны X_1X_2 дает α_1. Рассматривая сферический треугольник X_1NY_2, видим, что в нем $\smile NY_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $\angle X_1NY_2 = \pi - \theta$ и формула cos-а стороны X_1Y_2 дает β_1. В треугольнике $X_1NZ_2 \smile NZ_2 = \frac{\pi}{2}$ и cos стороны Z_2X_1 дает γ_1. Таким же образом могут быть получены и остальные шесть формул Эйлера (1). Если взять правую систему координатных осей, то все девять косинусов углов через углы Эйлера ψ, φ и θ выразятся такими же формулами (1), но только положительной стороной надо считать вращение и поворот от правой руки к левой обратно тому, как было условлено выше для этой координатной системы.

Выбор эйлеровых углов может быть сделан разнообразно, в зависимости от характера решаемой задачи.

§ 19. Поверхности 2-го порядка

1. **Сфера.** Уравнение сферы

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0 \tag{1}$$

x_0, y_0, z_0 — координаты центра; R — радиус сферы.

Всякое уравнение, в котором у квадратных членов коэфициенты одинаковы, а члены с произведениями неизвестных отсутствуют, т. е. уравнение вида

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

изображает сферу; координаты центра и радиус сферы выражаются через коэфициенты уравнения (2) таким образом:

$$x_0 = -\frac{1}{2}A; \quad y_0 = -\frac{1}{2}B; \quad z_0 = -\frac{1}{2}C \tag{3}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}. \tag{4}$$

2. Трехосный эллипсоид (рис. 167). Каноническое уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{5}$$

Начало координат в центре эллипсоида.

Пересекая эллипсоид плоскостями координат $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, получим в сечении эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (XOY); \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ (XOZ); \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ (YOZ). \tag{6}$$

Полагая в (5) $z=h$, увидим, что в сечении эллипсоида получается эллипс EE_1 (рис. 167) с полуосями a_1 и b_1

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \tag{7}$$

пропорциональными полуосям a и b.

Таким образом, эллипсоид есть поверхность, образованная движущимся эллипсом, плоскость которого остается параллельной плоскости XOY, концы осей которого скользят в плоскостях XOZ и YOZ по эллипсам (6).

Движущийся эллипс остается все время подобным эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

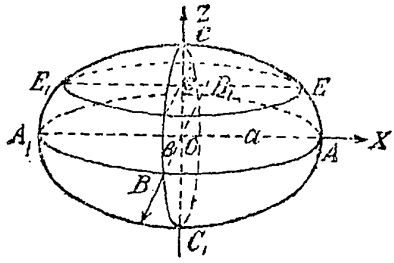


Рис. 167.

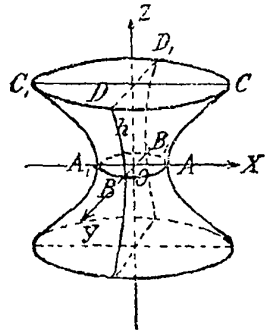


Рис. 168.

Если $a=b$, то получим эллипсоид вращения, ось которого OZ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}^*$$

Если $a=b=c$, то получим

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

уравнение сферы, центр которой в начале координат.

3. **Однополостный гиперболоид** (рис. 168). Каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c_2}=1. \tag{8}$$

Положив $z=0$, получим эллипс ABA_1B_1 (рис. 168) в пересечении гиперболоида с плоскостью XOY

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

В пересечении гиперболоида с плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY, получим эллипс CDC_1D_1; полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{10}$$

При изменении h от 0 до $\pm\infty$ эти полуоси остаются действительные и изменяются от a и b до $\pm\infty$.

Полагая $y=0$ и $x=0$, получим в пересечении две гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (XOZ);\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (YOZ). \tag{11}$$

Ось OZ будет мнимая ось этих гипербол.

Однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом, плоскость которого остается параллельна плоскости XOY и который при движении остается себе подобным, концы осей его скользят по гиперболам (11) в плоскостях XOZ и YOZ.

Если $a=b$, то получим однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{12}$$

Уравнение (8) может быть представлено в одной из последующих двух форм:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=u\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=v\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{v}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где u и v — произвольные параметры. При произвольных u и v уравнения (13) и (14) представляют каждое систему линий, принадлежащих однополостному гиперболоиду.

Помощью уравнений (13) и (14) координаты любой точки однополостного гиперболоида могут быть выражены в зависимости от параметров u и v в таком виде:

$$x=a\frac{uv+1}{v+u};\quad y=b\frac{v-u}{v+u};\quad z=c\frac{uv-1}{v+u}. \tag{15}$$

Таким образом, на однополостном гиперболоиде имеются две системы действительных прямолинейных образующих; две образующих одной системы между собой не пересекаются, две любых образующих разных систем всегда пересекаются между собой.

Ввиду сказанного однополостный гиперболоид может быть образован движением прямой одной системы по трем не пересекающимся прямым другой системы. Таким образом, однополостный гиперболоид принадлежит к линейчатым поверхностям.

4. Двухполостный гиперболоид (рис. 169). Уравнение в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{16}$$

Пересекая эту поверхность плоскостями координат $x=0$, $y=0$ и $z=0$, мы получим в сечении соответственно мнимое место и две гиперболы

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (XOZ);\quad -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (YOZ). \tag{17}$$

Пересекая двухполостный гиперболоид плоскостью $z=h$, получим эллипс, полуоси которого равны:

$$a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\,;\quad b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \tag{18}$$

и будут вещественны, если $h>c$.

Отсюда вытекает, что двухполостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом, плоскость которого параллельна плоскости XOY и который при движении остается себе подобным и концы осей его скользят по гиперболам (17) в плоскостях XOZ и YOZ. Поверхность симметрична относительно начала координат, а плоскости координат суть ее плоскости симметрии.

При $a=b$ уравнение (16) обращается в

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{19}$$

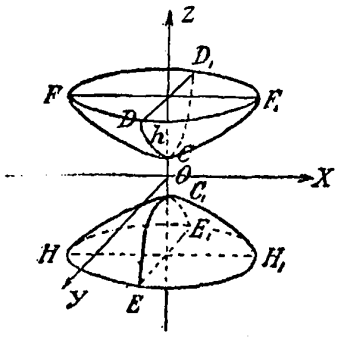


Рис. 169.

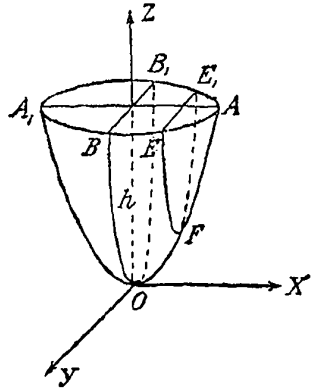


Рис. 170.

представляющее двухполостный гиперболоид вращения с осью OZ получаемый от вращения гиперболы вокруг действительной оси.

5. Эллиптический параболоид (рис. 170). Каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\quad (p>0\ \text{и}\ q>0). \tag{20}$$

Координатные плоскости XOZ и YOZ суть плоскости симметрии поверхности; так как при $z<0$ уравнение (20) не может быть удовлетворено вещественными значениями x и y, следовательно вся поверхность расположена над плоскостью XOY (в области положительных значений z). При $z=0$ имеем точку O, для которой $x=y=0$. Плоскость $z=h$ пересекает поверхность по эллипсу

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1, \tag{21}$$

полуоси которого

$$a_1=\sqrt{2ph}\quad\text{и}\quad b_1=\sqrt{2qh} \tag{22}$$

неограниченно возрастают с увеличением h.

Пересечения поверхности плоскостями координат (XOZ) и (YOZ) будут параболы

$$x^2=2pz\,(XOZ)\quad\text{и}\quad y^2=2qz\,(YOZ). \tag{23}$$

Если положить $x=m$, то получим в пересечении поверхности (20) с плоскостью $x=m$ параболу

$$y^2=2qz-\frac{q}{p}m^2 \tag{24}$$

и, положив

$$z'=z-\frac{m^2}{2p},$$

получим параболу

$$y^2=2qz', \tag{24}$$

т. е. сечения эллиптического параболоида плоскостями, параллельными плоскости ZOY, будут одинаковые параболы. Это же заключение будет справедливо для сечений плоскостями, параллельными плоскости ZOX $(y=n)$, т. е. будет

$$x^2=2pz', \tag{25}$$

где

$$z'=z-\frac{n^2}{2q}.$$

Таким образом видно, что эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом, который остается себе подобным, и оси которого скользят по параболам (23). Плоскость эллипса при движении остается параллельной плоскости XOY.

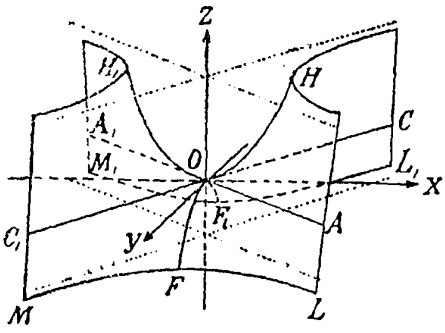


Рис. 171.

При $p=q$ уравнение (20) обращается в уравнение параболоида вращения

$$x^2+y^2=2pz \tag{26}$$

с осью OZ.

6. Гиперболический параболоид (рис. 171) представляет собой наиболее сложную из поверхностей 2-го порядка, каноническое уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0, \quad q>0). \tag{27}$$

Плоскость $z=0$ пересекает поверхность (27) по двум линиям, совокупность их изображается уравнениями:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0 \tag{28}$$

или

$$y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x, \tag{28}*$$

которые симметрично расположены относительно оси OX (CC_1 и AA_1)

Плоскость $z=h$ пересекает поверхность по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1. \tag{29}$$

Если $h>0$ — действительная ось гиперболы (29) будет параллельна оси OX; если $h<0$, то действительная ось будет параллельна оси OY. Сечение плоскостью $y=0$ будет парабола (HOH_1)

$$x^2=2pz, \tag{30}$$

ось которой совпадает с осью OZ.

Сечение плоскостью $x=0$ будет парабола FOF_1

$$y^2=-2qz, \tag{30*}$$

ось которой совпадает с отрицательным направлением оси OZ.

Сечение поверхности плоскостью $y=n$ дает параболу, уравнение которой

$$\left.\begin{aligned} &x^2=2pz+\frac{p}{q}n^2 \\ \text{или}\quad &x^2=2pz' \\ \text{где}\quad &z'=z+\frac{n^2}{2q} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Если пересечь поверхность плоскостью $x=m$, то получится парабола (например LHL_1),

$$\left.\begin{aligned} &y^2=2pz' \\ \text{где}\quad &z'=-z+\frac{m^2}{2p} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Таким образом, поверхность гиперболического параболоида имеет седлообразный вид (рис. 171) и неограниченно распространяется во всех направлениях.

Уравнение (29) может быть представлено в одной из следующих двух форм:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2u \\ &\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{z}{u} \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{z}{v} \\ &\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=2v \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Уравнения (33) при различных значениях параметра u изображают прямолинейные образующие гиперболического параболоида одной системы. Уравнения (33)* при различных значениях параметра v представляют прямолинейные образующие другой системы.

Две прямолинейные образующие одной и той же системы не пересекаются, а две любые образующие разных систем всегда пересекаются, ибо четыре уравнения (33) и (33)* всегда совместны и могут быть разрешены относительно координат x, y и z в следующем виде:

$$x=\sqrt{p}(u+v);\quad y=\sqrt{q}(u-v);\quad z=2uv. \tag{34}$$

Эти последние выражения можно рассматривать как параметрическое уравнение гиперболического параболоида. Таким образом и эта поверхность 2-го порядка подобно однополостному гиперболоиду принадлежит к так называемым линейчатым поверхностям, т. е. поверхностям, которые могут быть образованы движением прямой линии, перемещающейся по некоторому определенному закону.

§ 20. Инверсия *)

Инверсия или преобразование фигур посредством обратных радиусов-векторов есть преобразование пространства, определяемое сле-

*) Этот параграф написан В. В. Каврайским.

дующим образом: точка M' (рис. 172) называется **инверсией** точки M с полюсом O и **степенью** p^2, если M и M' лежат на одной прямой, проходящей через постоянную точку O, и произведение их радиусов-векторов

$$OM \times OM' \equiv rr' = p^2 \tag{1}$$

или

$$r' = \frac{p^2}{r}. \tag{2}$$

Из (1) видно, что инверсия есть преобразование взаимное, т. е. если M' есть инверсия точки M, то и наоборот — M есть инверсия точки M' с теми же степенью и полюсом.

Инверсией всякой фигуры называется геометрическое место инверсий всех ее точек.

Опишем шар O радиусом p вокруг полюса инверсии. В силу (1) инверсия A' всякой точки этого шара будет совпадать с самой точкой A (рис. 172).

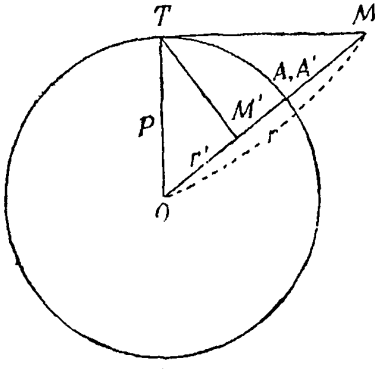


Рис. 172.

Инверсия, очевидно, отображает все пространство вне шара O пространством внутри шара и наоборот.

Проведем из M касательную MT к шару O и из точки касания опустим перпендикуляр TM' на OM. В силу подобия прямоугольных треугольников $M'OT$ и TOM условие (1) будет удовлетворено, т. е. точка M' будет инверсией точки M. Это позволяет геометрическим построением найти M' по данной M и наоборот.

Если принять полюс инверсии за начало прямоугольных декартовых координат, то аналитически координаты x, y, z точки M будут связаны с координатами ее инверсии $M'(x', y', z')$ равенствами

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} = \frac{p^2}{r^2} = \frac{r'^2}{p^2}, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{и } r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{p^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ x &= \frac{p^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

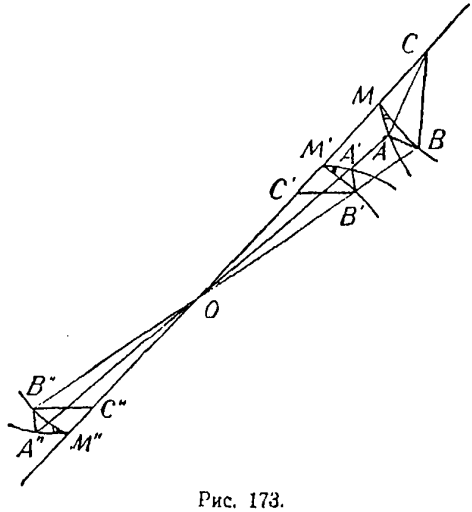


Рис. 173.

Инверсия обладает следующими важными свойствами:

1. **Инверсия есть равноугольное или конформное преобразование пространства.** Это значит, что углы между пересекающимися линиями (т. е. их пересечения) равны углам между касательными к ним в точке между инверсиями этих линий и все

размеры бесконечно малых фигур пропорциональны размерам инверсий этих фигур.

Например (рис. 173):

$$\angle AMB = \angle A'M'B'.$$

Однако, при $p^2 > 1$ эти фигуры будут не просто подобны, а симметрично подобны, т. е. инверсия бесконечно малой фигуры геометрически подобна зеркальному изображению самой фигуры. Лишь при $p^2 < 0$, когда радиусы-векторы OM'' диаметрально противоположны OM, получается просто геометрическое подобие бесконечно малых фигур и их инверсий.

2. Инверсия шара C (рис. 174), вообще говоря, есть шар. В этом легко убедиться, подставив в уравнение шара вместо x, y, z их выражения через x', y', z' по (5). Но инверсия C' центра шара не будет уже центром C_1 инверсии.

Инверсия полюса, очевидно, удалена в бесконечность. Поэтому инверсия шара, проходящего через полюс инверсии, имеет бесконечно удаленную точку, т. е. является шаром бесконечно большого радиуса — плоскостью.

3. Инверсия шара C, проходящего через полюс O инверсии (рис. 175), есть плоскость, перпендикулярная к прямой OC.

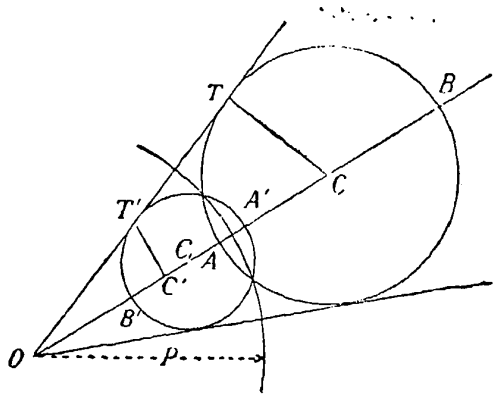


Рис. 174.

Всякую окружность можно рассматривать как линию пересечения двух шаровых поверхностей, поэтому:

4. Инверсия окружности есть, вообще говоря, окружность.

5. Инверсия окружности, проходящей через полюс инверсии, есть прямая.

Инверсия является единственным преобразованием пространства, кроме перемещения фигур и их замены подобными и симметричными, при котором все шары изображаются шарами и, следовательно, все круги — кругами (если считать плоскость и прямую за частные случаи шара и круга).

Инверсия нередко используется как средство геометрического исследования. Поясним это следующим примером.

На рис. 175 видно, что инверсия точек M шара, проходящих через полюс O инверсии, суть перспективы этих точек на плоскость K из точки зрения O, лежащей на поверхности шара и на перпендикуляре к картинной плоскости K, проведенном через центр C шара.

Такое изображение поверхности шара на плоскости называется стереографической проекцией и часто применяется в картографии, геодезии, астрономии и даже в чистой математике.

Из предыдущего следует, что стереографическая проекция есть равноугольное изображение поверхности шара на плоскости и что всякая окружность, лежащая на поверхности шара, изображается в стереографической проекции окружностью же (если считать прямую за предельный частный случай окружности).

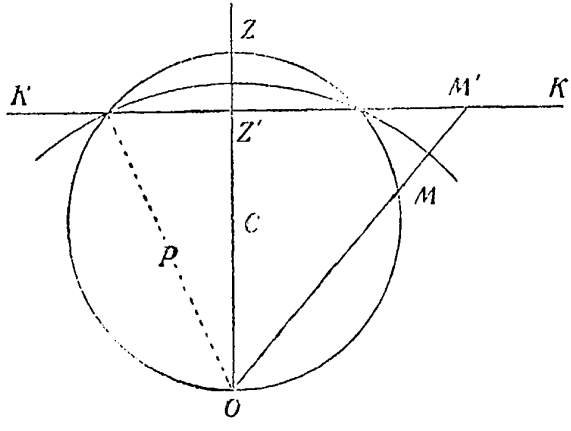


Рис. 175.

Инверсия на плоскости. Все сказанное выше об инверсии в пространстве применимо и к инверсии на плоскости с заменою шаров и плоскостей кругами и прямыми.

При начале плоских прямоугольных координат в полюсе O инверсии аналитическая связь между точкой $M(x, y)$ и ее инверсией $M'(x', y')$ по (1) при $z=0$, будет:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{p^2 x}{x^2+y^2} & x &= \frac{p^2 x'}{x'^2+y'^2} \\ y' &= \frac{p^2 y}{x^2+y^2} & y &= \frac{p^2 x'}{x'^2+y'^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

При помощи комплексных чисел эта связь может быть записана еще так:

$$x'+iy' = \frac{p^2}{x-iy}, \qquad (7)$$

где $x'+iy'$ — комплексное число, соответствующее точке M', а $x-iy$ — комплексное число, соответствующее точке, симметричной M относительно оси Ox.

Примечание. На плоскости возможно бесчисленное множество конформных (равноугольных) преобразований. Их общее уравнение

$$x'+iy' = f(x+iy) \quad \text{или} \quad F(x-iy), \qquad (8)$$

где f — символ любой аналитической функции, а F — функции с ней сопряженной.

Относительно же трехмерного пространства доказано, что для него инверсия является единственным возможным конформным преобразованием, если не считать перемещения фигур и замены их подобными и симметричными фигурами.

ОТДЕЛ II

НАЧАЛА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Глава 1

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Диференциальное исчисление

Стр.

§ 1. Основные определения и обозначения 237
§ 2. Правила диференцирования. Таблица производных элементарных функций 238
§ 3. Формулы диференцирования 239
§ 4. Функции нескольких переменных 240
§ 5. Приложение к исследованию функций 240
§ 6. Раскрытие неопределенных выражений 242
§ 7. Maxima и minima 242
§ 8. Приложения к геометрии 245

II. Интегральное исчисление

§ 9. Основные понятия и определения 252
§ 10. Способы интегрирования. Таблица некоторых интегралов 255
§ 11. Вычисление площадей и длин дуг кривых 258
§ 12. Формулы для вычисления средних значений $\sin^n x$ и $\cos^n x$ при изменении угла x от α_1 до α_2 $(\alpha_2 > \alpha_1)$ 260
§ 13. Приближенное вычисление определенных интегралов 261
§ 14. Интегрирование линейных диференциальных уравнений 1-го порядка . 265
§ 15. Интегрирование некоторых линейных диференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэфициентами 267
§ 16. Интегрирование некоторых линейных диференциальных уравнений 3-го порядка с постоянными коэфициентами 275

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Академик В. И. Смирнов. Курс высшей математики I и II том. Изд. десятое ГИТТЛ 1940, М. Л. Изд. восьмое ГИТТЛ. 1940, М. Л.
2. Академик А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков. Общая теория гироскопов, 1932 г. Изд. Академии Наук.

I. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Основные определения и обозначения

1. $x \to a$ или $\lim x = a$ означает, что переменная x стремится к пределу, равному a, т. е. разность $(x - a)$ неограниченно убывает. Если x неограниченно убывает, то это обозначают $x \to 0$ или $\lim x = 0$; если x неограниченно возрастает, т. е. делается больше любой наперед заданной величины, то это обозначают $x \to \infty$ или $\lim x = \infty$.

Если $f(x)$ есть функция вещественного переменного, то символ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает, что когда переменная (аргумент) x стремится к a, то значение функции стремится к пределу b.

2. Предельные значения некоторых выражений:

n — означает целое положительное число

$\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$, если $a > 1$; $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 1$, если $a = 1$; $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, если $|a| < 1$;

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$;

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828 \ldots$; $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ формула Стирлинга

$\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 (2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$ формула Валлиса.

3. Функция называется непрерывной в точке x, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ есть производная от функции $f(x)$ по x.

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой.

5. Геометрическое значение производной $f'(x)$

$$f'(x) = \operatorname{tg} \vartheta,$$

т. е. первая производная $f(x)$ равна tg-у угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ к положительной оси X (рис. 176).

6. Приращение функции $y=f(x)$

$\Delta y=\Delta f(x)=NM_1=f(x+\Delta x)-f(x)=P_1M_1-PM$ (рис. 176).

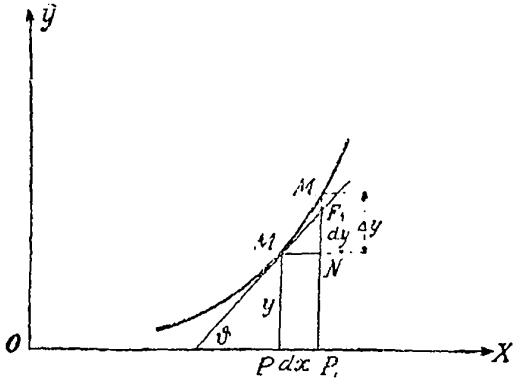


Рис. 176.

7. Дифференциал функции $y=f(x)$

$$dy=f'(x)\,dx=df(x)=NF=\Delta x\cdot\operatorname{tg}\vartheta.$$

$\Delta x=dx$, т. е. дифференциал независимой переменной равен произвольному приращению аргумента или дифференциал независимой переменной есть бесконечно малая величина, не зависящая от величины x.

8. Производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

9. Каждая дифференцируемая функция будет также и непрерывная, но обратное заключение не справедливо.

§ 2. Правила дифференцирования

u, v, w ... какие угодно дифференцируемые функции от x; a — постоянная величина.

1. $(a)'=0$; $(a+u)'=u'$; 2. $(au)'=au'$; 3. $(u+v+w+\ldots)'=u'+v'+w'+\ldots$, т. е. производная от суммы равна сумме производных; 4. $(u\cdot v)'=u'v+v'u$; 5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; 6. $(uvw\ldots)'=\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}+\ldots\right)(uvw\ldots)=u'vw\ldots+v'uw\ldots+w'uv\ldots$; 7. $\frac{df(u)}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$ — правило дифференцирования сложной функции, где

$$f=f(u);\quad u=u(v);\quad v=v(w);\quad w=w(x).$$

8. Если $y=f(x)$, то $x=g(y)$ так называемая обратная функция

$$g'(y)=1:f'(x).$$

9. Если y есть неявная функция, определяемая уравнением $f(x,y)=0$, то

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y},$$

где $f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}$ и $f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}$ ... частные производные (см. ниже § 4).

Таблица производных элементарных функций

1. $(x^m)'=mx^{m-1}$; 2. $\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$; 3. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 5. $\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{m}{x^{m+1}}$; 6. $\left(\frac{m+nx}{p+qx}\right)'=\frac{np-mq}{(p+qx)^2}$;

7. $(e^x)'=e^x$; 8. $(a^x)'=a^x\ln a$; 9. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

10. $(\lg x)' = \frac{\mu}{x}$ (μ модуль обыкновенной системы логарифмов);

11. $(x^y)' = x^{y-1}(x \ln x \cdot y' + y)$; 12. $(\sin x)' = \cos x$;

13. $(\cos x)' = -\sin x$; 14. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 15. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$;

16. $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x$; 17. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$;

18. $(\ln \sin x)' = \operatorname{ctg} x$; 19. $(\ln \cos x)' = -\operatorname{tg} x$; 20. $(\ln \operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\sin 2x}$;

21. $(\ln \operatorname{ctg} x)' = \frac{-2}{\sin 2x}$; 22. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

23. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; 24. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

25. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$; 26. $(\operatorname{arc\,sec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$;

27. $(\operatorname{arc\,cosec} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$; 28. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 29. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

30. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 31. $(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$; 32. $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$;

33. $(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cth} x$; 34. $(\operatorname{Ar\,cth\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

35. $(\operatorname{Ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 36. $(\operatorname{Ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2} = (\operatorname{Ar\,cth} x)'$;

37. $(\operatorname{Ar\,cth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$; 38. $(\operatorname{Ar\,sech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$;

39. $(\operatorname{Ar\ cosech}\ x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

§ 3. Формулы диференцирования

Таблица производных элементарных функций представляет собой также таблицу диференциалов соответственных функций; для получения этих последних обе части формул таблицы надо помножить на диференциал переменной независимой dx. Так, например:

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad d\operatorname{Ar\,sh} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$d\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x\,dx \text{ и т. д.}$$

Производные и диференциалы высших порядков

Обозначения:

$$f''(x) = [f'(x)]' \qquad d^2 f(x) = d[df(x)]$$

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \qquad d^n f(x) = d[d^{n-1} f(x)].$$

Значок (n) указывает n-ую производную, а не степень, т. е.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Если x независимая переменная, то dx^2 есть вторая степень dx и т. д., а $d^2x = 0$.

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2 \ldots; \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

1. $(x^m)^{(n)} = \binom{m}{n} n!\, x^{m-n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

2. $(e^x)^{(n)} = e^x \quad (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

3. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$.

4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$.

Если $y = f(u)$, а $u = u(x)$,

то $$d^2y = d^2f(u) = f'(u)\,d^2u + f''(u)\,du^2;$$

$$d^3y = d^3f(u) = f'(u)\,d^3u + 3f''(u)\,d^2u \cdot du + f'''(u)\,du^3.$$

§ 4. Функции нескольких переменных

Если $U = f(x \cdot y \ldots)$ есть функция двух или нескольких независимых переменных, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= f_x'(x, y \ldots) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= f_y'(x, y \ldots) \end{aligned}\right\} \text{ суть частные производные от } f \text{ по } x \text{ и } y \text{ и т. д.} \qquad (1)$$

Вычисляя частную производную от f по x, переменную y считают как бы за постоянную величину. Вычисляя частную производную от f по y, наоборот, x считают за постоянную величину и т. д.

Полный дифференциал функции $U = f(x \cdot y \ldots)$

$$dU = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots \equiv d_x f + d_y f + d_z f + \ldots, \qquad (2)$$

т. е. полный дифференциал функции нескольких переменных равен сумме частных дифференциалов.

Дифференциал 2-го порядка для функции двух переменных $U = f(x,y)$

$$d^2U = d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \qquad (3)$$

Свойство частных производных высшего порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

т. е. при вычислении второй производной от функции нескольких переменных можно менять порядок дифференцирования.

Если y есть неявная функция y от x, определяемая уравнением $F(xy) = 0$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}. \qquad (4)$$

§ 5. Приложение к исследованию функций

1. Возрастание и убывание функции. Если в некотором промежутке изменения переменной независимой $f'(x)$ остается поло-

жительной, то в этом интервале $f(x)$ возрастает. В том интервале изменения переменной независимой, в котором $f'(x)$ остается отрицательной, $f(x)$ убывает. Если рис. 177 представляет график функции $y=f(x)$, то, когда $f'(x)=\operatorname{tg}\vartheta>0$, $f(x)$ возрастает, а когда $f'(x)=\operatorname{tg}\vartheta<0$, то функция $f(x)$ убывает.

2. Теорема Ферма. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), в каждой точке внутри этого промежутка имеет производную и в некоторой точке $x=c$ внутри этого промежутка достигает наибольшего (maximum) или наименьшего (minimum) значения (extremum)*), то в этой точке $x=c$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю, т. е. $f'(c)=0$.

3. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), имеет производную в каждой точке внутри этого промежутка и значения на концах этого промежутка равны, т. е. $f(a)=f(b)$, то

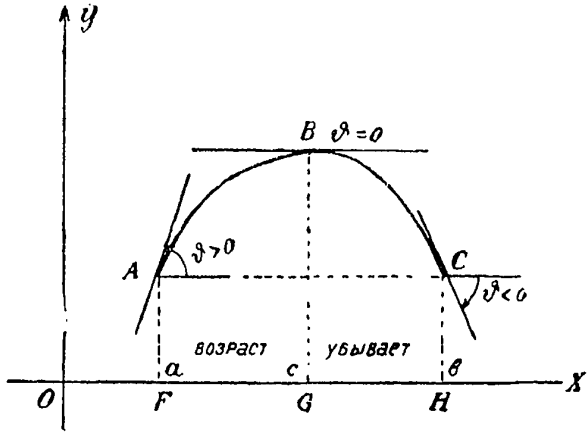


Рис. 177.

внутри этого промежутка существует, по крайней мере, одно такое значение $x=c$, при котором производная $f(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$; рис. 177 геометрически интерпретирует теорему Ролля, которую кратко можно формулировать так: между двумя корнями функции заключается, по крайней мере, один корень первой производной.

4. Формула Лагранжа.

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \quad \text{где } a<c<b,$$

или

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h) \quad \text{где } \theta<1. \tag{1}$$

5. Формула Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке (a, b) и $\varphi'(x)$ в этом промежутке в нуль не обращается, то

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+h\theta)}{\varphi'(a+h\theta)}. \tag{2}$$

*) Термин extremum означает либо maximum, либо minimum.

§ 6. Раскрытие неопределенных выражений

$\frac{0}{0}$ Если $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, а $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ Если $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, а $\varphi(a)=\infty$ и $\psi(a)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

$0\cdot\infty$ Если $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$, а $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=\infty$, то, положив $\psi(x)=1:\mu(x)$, приведем задачу к виду $\frac{0}{0}$.

$\infty-\infty$ Если $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, а $\varphi(a)=\infty$ и $\psi(a)=\infty$, то, положив $\varphi(x)=1:u(x)$ и $\psi(x)=1:v(x)$, получим

$$f(x)=\frac{v(x)-u(x)}{u(x)\,v(x)},$$

т. е. приведем задачу к первому случаю $0:0$.

§ 7. Maxima и minima

А. Абсолютные maxima и minima (extremum).

1. Extremum функции $f(x)$ одного переменного определяется решением уравнения: $\operatorname{tg}\vartheta=f'(x)=0$.

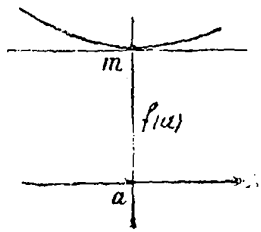


Рис. 178.

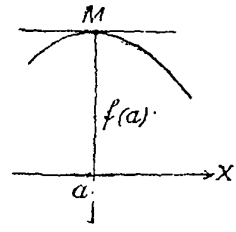


Рис. 179.

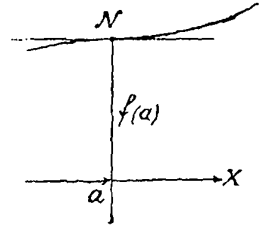


Рис. 180.

Пусть a есть одно из решений этого уравнения, тогда, если 1) $f''(a)>0$, то при $x=a$ функция $f(x)$ имеет minimum (рис. 178), 2) $f''(a)<0$, то при $x=a$ функция $f(x)$ имеет maximum (рис. 179).

Если же $f''(a)=0$, то надо обратиться к исследованию знаков высших производных. Пусть первая из необращающихся в нуль производных будет n-го порядка, т. е. $f^{(n)}(a)\neq 0$.

Если n четное число, то:

при $f^{(n)}(a)>0$ будет minimum (рис. 178),

при $f^{(n)}(a)<0$ будет maximum (рис. 179).

При n нечетном функция при $x=a$ не имеет ни maximum-а ни minimum-а (рис. 180 и 181).

Для определения величины наибольшего или наименьшего значения функции $y=f(x)$ надо найденное значение $x=a$ подставить в данное уравнение, т. е. найти величину $Y=f(a)$.

2. В случае двух переменных независимых extremum функции $U=f(x, y)$ ищут, решая совместно два уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Пусть $x=a$ и $y=b$ одно из решений этих уравнений.

Для определения дает ли данное решение maximum или minimum составляем высшие производные и обозначаем значения их, как показано.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x=a}=A \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=a \\ y=b}}=B \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{y=b}=C.$$

1) Если $AC-B^2>0$, то

при $A<0$ имеем maximum,
при $A>0$ имеем minimum.

2) Если $AC-B^2<0$, то функция не имеет ни max, ни min.

3) Если $AC-B^2=0$, то получается сомнительный случай.

Пример. Пусть из ряда равноточных прямых измерений какой-нибудь величины получены результаты, несколько отличные один от другого вследствие случайных ошибок наблюдений

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n.$$

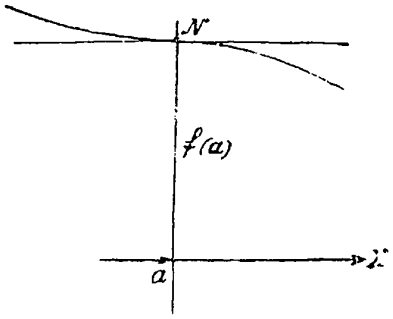


Рис. 181.

За вероятнейшее значение x искомой величины принимают такое, при котором сумма квадратов „видимых ошибок", т. е. уклонений, $x-l_1=v_1$, $x-l_2=v_2, \ldots, x-l_n=v_n$ будет наименьшая.

Таким образом, нахождение этого значения приводится к определению неизвестной x из условия, что функция

$$y=f(x)=(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+(x-l_3)^2+\ldots+(x-l_n)^2$$

достигает наименьшей величины.

Составляем уравнение

$$y'=f'(x)=2(x-l_1)+2(x-l_2)+2(x-l_3)+\ldots+2(x-l_n)=0,$$

откуда получается

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots+l_n}{n},$$

т. е. вероятнейшее значение искомой величины, получаемой из прямых измерений, будет среднее арифметическое из всех полученных результатов.

Так как

$$y''=f''(x)=2+2+\ldots+2=2n>0,$$

то мы имеем действительно minimum функции $y=f(x)$.

Б. Относительные maxima и minima (метод Лагранжа)

Если ищут max или min функции

$$U = \Phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

от n переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, связанных m условными уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

то мы имеем случай, так называемых относительных max и min и непосредственно применение правил, данных выше, здесь невозможно.

Для решения задачи надо применить первую теорему Лагранжа.

1-я теорема.

Для приведения задачи к случаю независимых переменных, надо взять m произвольных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ и образовать новую функцию Ω вида:

$$\Omega = \Phi + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

и составить n частных производных от этой функции Ω по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, считая их независимыми, т. е. вычислить выражения:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x_3} = 0 \ldots \frac{\partial\Omega}{\partial x_n} = 0.$$

Эти уравнения числом n и m условных уравнений (*) дают $n + m$ уравнений, достаточных для определения тех n неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, которые обращают функцию Φ в extremum, и m произвольных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$.

Это положение составляет первую теорему Лагранжа.

Частный случай.

Часто встречаются случаи, когда неизвестные $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ связаны одним условным уравнением

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

Тогда условие maximum-а или minimum-а получается из n уравнений

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}} = -\lambda$$

и заданного уравнения $U = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Это выражается следующей теоремой.

2-я теорема.

Если ищут extremum функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных, связанных одним условным уравнением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то соответственные частные производные от функции Φ пропорциональны частным производным по тем же переменным от левой части условного уравнения φ.

Пример. Разделить данное положительное число a на три слагаемых x, y и z так, чтобы произведение

$$\Phi = x^m y^n z^p,$$

где m, n и p — данные числа, было maximum.

Условное уравнение имеет вид:

$$\varphi = x + y + z - a = 0,$$

поэтому

$$\frac{mx^{m-1}y^n z^p}{1} = \frac{nx^m y^{n-1} z^p}{1} = \frac{px^m y^n z^{p-1}}{1} = -\lambda.$$

Умножая эти уравнения соответственно на x, y и z и подставляя в условное уравнение, получим, что

$$\lambda = -\frac{(m+n+p)}{a} x^m y^n z^p,$$

откуда следует, что

$$x = \frac{m \cdot a}{m+n+p}; \quad y = \frac{n \cdot a}{m+n+p}; \quad z = \frac{p \cdot a}{m+n+p},$$

т. е. данное число a надо разделить пропорционально показателям степеней в функции Ф. При таком разделении наибольшее значение Ф будет:

$$\Phi_{\max} = \frac{m^m n^n p^p a^{(m+n+p)}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

§ 8. Приложения к геометрии

1. Касательная и нормаль к кривой. Угол ϑ, который образует касательная к кривой в точке $M(x, y)$ с осью X равен

$$\operatorname{tg}\vartheta = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (1)$$

Если ds есть бесконечно малая дуга кривой MM_1, то (рис. 182)

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}; \quad \sin\vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad (2)$$

т. е. ее можно заменить бесконечно малой длиной касательной MN.

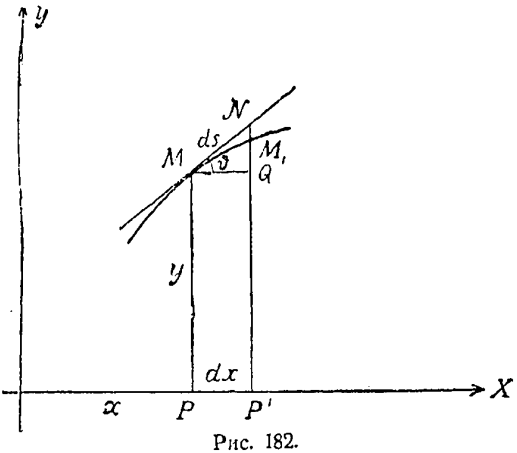


Рис. 182.

Уравнение касательной MT в точке $M(x_1, y_1)$ (рис. 183, x и y — текущие координаты касательной):

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1). \quad (3)$$

Если кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$, то уравнение касательной будет:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) = 0. \quad (3^*)$$

Уравнение нормали MN в точке $M(x_1, y_1)$ (рис. 183)

$$y - y_1 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 (x - x_1) \tag{4}$$

или

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (x - x_1) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (y - y_1) = 0. \tag{4}^*$$

Длина касательной

$$t = MT = y\left(\frac{ds}{dy}\right)_1 = y_1\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2} = \frac{y_1}{y_1'}\sqrt{1 + y_1'^2}. \tag{5}$$

Длина подкасательной

$$t_s = PT = y_1\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 = \frac{y}{y_1'}. \tag{6}$$

Длина нормали

$$n = MN = y_1\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}. \tag{7}$$

Длина поднормали

$$n_s = PN = y_1 \cdot y_1'. \tag{8}$$

Во всех этих формулах значения производных y' отнесены к точке $M(x_1, y_1)$, что для наглядности отмечено значком „1“ при y и y'.

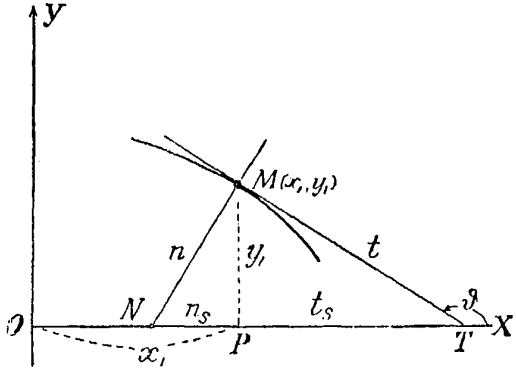


Рис. 183.

Диференциал дуги есть отрезок касательной MN, соответствующий приращению x на $dx = PP'$.

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{9}$$

Если x переменная независимая, то

$$ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{10}$$

Если кривая задана в параметрической форме

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t),$$

то

$$ds = \pm\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot dt. \tag{11}$$

2. Вогнутость, выпуклость, кривизна, точки перегиба кривой и ее асимптоты. Ордината кривой возрастает, если $y' = f'(x) > 0$

Ордината кривой убывает, если $y' = f'(x) < 0$ (12)

Наибольшая или наименьшая ордината определяется из уравнения $f'(x) = 0$ (max или min).

Кривая выпуклостью обращена в сторону положительных ординат, т. е. в сторону возрастания ординат на тех участках, где $f''(x) < 0$ (рис. 184).

Кривая вогнутостью обращена в сторону положительных ординат, т. е. на тех участках, где $f''(x) > 0$.

Точки перегиба кривой суть те, переходя через которые $f''(x)$ меняет знак. Эти точки определяются из условия (рис. 184)

$$f''(x) = 0. \tag{13}$$

Кривизна кривой k есть отношение диференциала угла смежности $d\alpha$, т. е. угла между касательными в двух бесконечно близких точках кривой, к диференциалу дуги ds.

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{14}$$

Радиус кривизны

$$R=\frac{1}{k}=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\pm\frac{n^3}{y^3y''}. \tag{15}$$

Если длину дуги s принять за независимое переменное, то

$$k=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \tag{16}$$

Асимптотой кривой с бесконечной ветвью называется такая прямая, у которой расстояние точек кривой до этой прямой при бесконечном удалении по кривой стремится к нулю.

Асимптоты, параллельные оси Y-ов у кривой $y=f(x)$, получаются, если найти те значения $x=c$, при приближении к которым $y=f(x)$ стремится к бесконечности.

Например, уравнение кривой задано в форме:

$$y=\frac{(x-3)^3}{4(x-1)}.$$

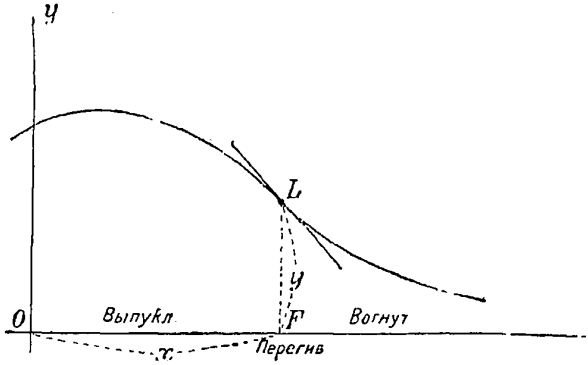


Рис. 184.

Очевидно, что при $x\to 1$ $y\to\infty$, т. е. $x=1$ есть асимптота этой кривой.

Асимптоты, не параллельные оси Y, имеют уравнение

$$\eta=\alpha\xi+\beta,$$

где α и β определяются из уравнения кривой следующим образом:

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{17}$$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}[f(x)-\alpha x]. \tag{18}$$

Например, напишем уравнение гиперболы в таком виде:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}=\pm\frac{b}{a}$$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\pm\frac{b}{a}x\right]=0,$$

т. е. уравнение асимптот гиперболы будет:

$$\eta = \pm \frac{b}{a}\xi.$$

Если уравнение кривой задано в параметрической форме

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t),$$

где t — переменная независимая, то

$$dx = \varphi'(t)\,dt \quad dy = \psi'(t)\,dt$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{(dx)^3} = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Поэтому во всех предыдущих формулах следует y', y'', dx и dy заменить указанными здесь выражениями.

Так, например, для радиуса кривизны R получим

$$R = \frac{[dx^2 + dy^2]^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}, \qquad (15)^*$$

если обозначить теперь штрихами производные по параметру.

Пример. Найти радиус кривизны эллипса

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

$$y' = -\frac{xb^2}{ya^2} \qquad y'' = \frac{-y^2a^2b^2 - x^2b^4}{y^3a^4}$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = -\frac{(y^2a^4 + x^2b^4)^{3/2}}{a^2(x^2b^2 + y^2a^2)b^2} = \frac{(y^2a^4 + x^2b^4)^{3/2}}{a^4b^4} = \frac{a^2b^2}{l^3}, \qquad (19)$$

где l — длина перпендикуляра из центра эллипса на касательную (см. форм. 18 § 4 гл. 5 отд. I).

Исключив y, найдем

$$R = \frac{(a^2 - e^2x^2)^{3/2}}{ab}. \qquad (19)^*$$

Если уравнение эллипса взять в параметрической форме

$$x = a\cos t = \varphi(t) \qquad y = b\sin t = \psi(t),$$

то получим

$$R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab} = \frac{a^3}{b}(1 - e^2\cos^2 t)^{3/2}.$$

Важные частные случаи.

Если $t = 0$ или $x = a$, то для вершин большой оси в точках A и A' радиус кривизны (рис. 185)

$$R_0 = \frac{a^2}{b}(1 - e^2)^{3/2} = a(1 - e^2).$$

Если $t = \frac{\pi}{2}$ или $x = 0$, то для вершин малой оси в точках B и B' радиус кривизны

$$R_1 = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{(1 - e^2)^{1/2}}.$$

3. Огибающая семейства кривых. Пусть

$$F(x, y, C)=0 \tag{20}$$

есть уравнение некоторой определенной кривой, при постоянном C. Если параметр C принимает различные значения, то получается семейство однородных кривых, различающихся лишь формой или расположением. Огибающей этого семейства кривых называется линия, которая во всех своих точках касается различных линий семейства кривых $F(x, y, C)=0$, т. е. имеет в каждой своей точке касательную, общую с линией семейства этих кривых, проходящих через эту точку. Уравнение огибающей может быть получено путем исключения параметра C из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, C)&=0 \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

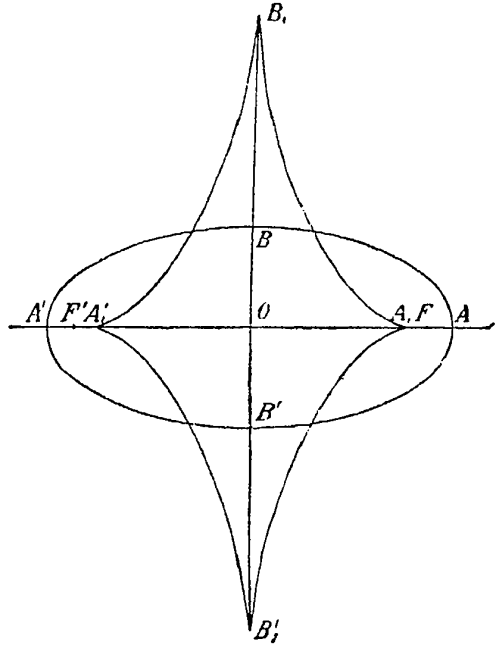


Рис. 185.

Пример. Найти огибающую семейства прямых линий, двигающихся так, что концы их всегда остаются на осях координат, а длина a линии остается неизменной. Обозначая через m и n отрезки на осях, напишем уравнение прямой в таком виде:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$$

причем

$$m^2+n^2=a^2.$$

Поэтому уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{\sqrt{a^2-m^2}}=1;$$

при m постоянном это будет определенная прямая; при m переменном получим семейство прямых, двигающихся указанным выше образом. Величина m есть параметр, обозначенный выше через C. Диференцируя по m, получим:

$$\frac{-x}{m^2}+\frac{ym}{\sqrt{(a^2-m^2)^3}}=0.$$

Исключив из этих двух уравнений параметр m, найдем

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$

т. е. огибающая будет астроида (отд. I, гл. 5, уравнение 34).

4. Эволюта плоской кривой представляет собой геометрическое место ее центров кривизны. Обозначая через ξ и η координаты центра кривизны, найдем уравнение эволюты в параметрическом виде

$$\xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''},\tag{22}$$

где штрихи обозначают производные по x. Параметрами являются x и y, связанные уравнением кривой. Если уравнение кривой задано в параметрической форме, то уравнение эволюты надо написать в таком виде:

$$\xi=x-\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}\qquad \eta=y+\frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,dx^2}\tag{23}$$

$$\text{или } \xi=x-\frac{\psi'(t)\,([\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2)}{\varphi'(t)\,\psi''(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)}=x-\frac{y'\,(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$$

$$\eta=y+\frac{\varphi'(t)\,([\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2)}{\varphi'(t)\,\psi''(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)}=y+\frac{x'\,(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}.\tag{23*}$$

Пример. Эволюта эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если написать уравнение эллипса в параметрической форме

$$x=a\cos t\qquad y=b\sin t,$$

то уравнение эволюты будет:

$$\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

$$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

Исключив параметр t, найдем уравнение эволюты эллипса в обычной форме

$$a^{2/3}\xi^{2/3}+b^{2/3}\eta^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}\tag{24}$$

в прямоугольных координатах.

Общий вид эволюты эллипса показан на рис. 185.

Вершины A_1 A_1' эволюты, лежащие на оси X, всегда располагаются между центром O и фокусами F и F'.

Вершины B_1 и B_1' эволюты, лежащие на оси Y, могут располагаться различным образом относительно самого эллипса, а именно:

1. Если эксцентриситет $e<\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707\ldots$, то вершины эволюты лежат внутри эллипса.

2. Если эксцентриситет $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то вершины эволюты B_1 и B_1' совпадают с вершинами эллипса B и B'.

3. Если эксцентриситет $e>\frac{1}{\sqrt{2}}$, то вершины эволюты лежат вне эллипса.

На рис. 185 показан эллипс, у которого $e=0{,}866$.

Эволюту можно рассматривать как огибающую нормалей к кривой.

Уравнение нормали

$$(\xi-x)+y'(\eta-y)=0.$$

Рассматривая x как параметр, диференцируем это уравнение по x; найдем

$$-1+y''(\eta-y)-y'^2=0.$$

Исключая из этих уравнений x, получим уравнение эволюты в параметрической форме, приведенное выше.

5. Кривые в полярных координатах. Уравнение кривой задано в полярных координатах

$$r=f(\varphi).$$

Обозначая через μ угол между продолжением радиуса-вектора r и касательной MT в направлении положительного направления увеличения угла φ, имеем:

$$\cos\mu=\frac{dr}{ds};\ \sin\mu=\frac{r\,d\varphi}{ds};\ \operatorname{tg}\mu=\frac{r\,d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'}. \tag{25}$$

Угол μ определяет направление касательной к кривой в точке $M(r, \varphi)$ (рис. 186).

Проведем линию N_0T_0 перпендикулярно к радиусу-вектору точки M и заметим точки N_0 и T_0 пересечения ее с касательной и нормалью. Длина полярной касательной

$$MT_0=t=r\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}=$$

$$=\frac{r}{r'}\sqrt{r^2+(r')^2}=\frac{r}{r'}\cdot n. \tag{26}$$

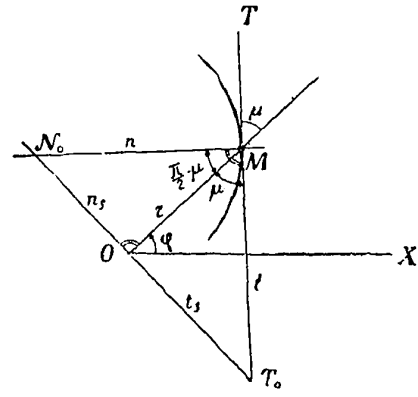


Рис. 186.

Длина полярной нормали

$$MN_0=n=\sqrt{r^2+(r')^2}. \tag{27}$$

Длина полярной подкасательной

$$OT_0=t_s=\frac{r^2}{r'}. \tag{28}$$

Длина полярной поднормали

$$ON_0=n_s=r'. \tag{29}$$

Диференциал дуги

$$ds=\sqrt{dr^2+(r\,d\varphi)^2}=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=n\cdot d\varphi. \tag{30}$$

Радиус кривизны

$$R=\pm\frac{(r^2+(r')^2)^{3/2}}{r^2+2(r')^2-rr''}. \tag{31}$$

II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 9. Основные понятия и определения

А. Неопределенный интеграл

Функция y, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной или $f(x)\,dx$ своим дифференциалом, называется первообразной по отношению к данной функции $f(x)$.

Общее выражение для первообразной функции называется также неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ или от данного дифференциала $f(x)\,dx$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

причем функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, а $f(x)\,dx$ — подинтегральным выражением.

Самое общее выражение для первообразной функции можно написать так:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1}^*$$

где $F(x)$ есть какая-нибудь первообразная функция, а C — произвольная постоянная, т. е. первообразная функция определяется с точностью до некоторой постоянной.

Б. Определенный интеграл

Пусть кривая AMB представляет собой график функции $f(x)$, которая в пределах от a до b непрерывна; разобьем интервал $b-a$

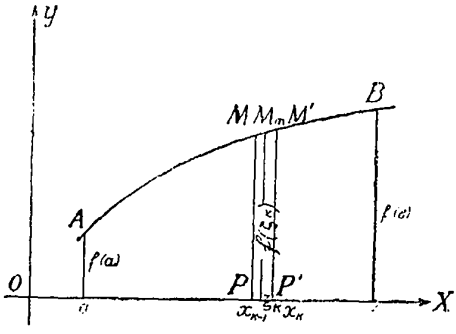


Рис. 187.

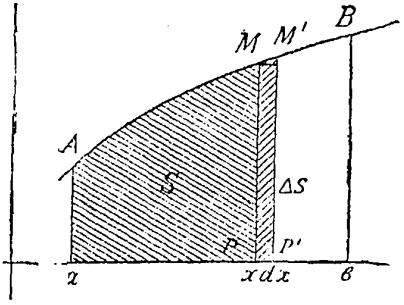


Рис. 188.

на n частей, проведем две соседних ординаты $MP = f(x_{k-1})$ и $M'P' = f(x_k)$, составим выражение (рис. 187)

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \approx \text{бесконечно малой площади } PMM'P'$$

и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{где } x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

Тогда предел этой суммы, очевидно, равен площади $aABb$ кривой $y = f(x)$ между $x = a$ и $x = b$.

Этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$, взятым по переменной x между нижним пределом $x=a$ и верхним $x=b$, и обозначается следующим символом:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Величина определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования, а только от вида функции $f(x)$ и пределов, а потому можно написать:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt. \qquad (2)$$

В. Связь определенного и неопределенного интегралов

Если верхний предел определенного интеграла есть величина переменная x, то площадь $aAMP=S$ (рис. 188) есть переменная величина, зависящая от верхнего предела x, то есть

$$S=\int_a^x f(t)\,dt,$$

поэтому

$$\frac{dS}{dx}=f(x),$$

т. е. производная определенного интеграла по верхнему пределу равна подинтегральной функции, иначе сказать определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная функция для подинтегральной функции.

Г. Величина определенного интеграла

Если неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ есть первообразная функция, то определенный интеграл

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \qquad (2)^*$$

т. е. величина определенного интеграла равна разности значений первообразной функции для верхнего и нижнего пределов.

Очевидно, что если

$$S=\int_x^b f(t)\,dt,$$

$$\frac{dS}{dx}=-f(x), \qquad (3)$$

т. е. производная определенного интеграла по нижнему пределу равна отрицательному значению подинтегральной функции.

Д. Свойства неопределенного интеграла

1. Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянное число.

2. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, а дифференциал — подинтегральному выражению, то есть

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)\\ &d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. Очевидно,

$$\int F'(x)\,dx=\int dF(x)=F(x)+C, \tag{5}$$

поэтому рядом стоящие знаки d и $\int$, в каком бы они порядке ни следовали, взаимно уничтожаются, если не обращать внимания на произвольную постоянную.

4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла, то есть

$$\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx. \tag{6}$$

5. Интеграл алгебраической суммы равен сумме интегралов от каждого слагаемого

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx-\int\psi(x)\,dx. \tag{7}$$

Е. Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами равен нулю.

2. При перестановке верхнего и нижнего пределов определенный интеграл меняет знак, сохраняя абсолютную величину.

3. Если дан ряд чисел $a, b, c, d, \ldots, k, l$, расположенных в каком угодно порядке, то

$$\int_a^l f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\ldots+\int_k^l f(x)\,dx \tag{8}$$

4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла.

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме определенных интегралов от каждого слагаемого.

6. Теорема о среднем. Если $\varphi(x)$ сохраняет знак в промежутке (ab), то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

где ξ — есть некоторое среднее значение переменной, лежащее в промежутке (ab).

Частный случай. Если $\varphi(x)=1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi), \tag{10}$$

т. е. значение определенного интеграла равно разности пределов, умноженной на некоторое среднее значение подинтегральной функции между пределами a и b.

§ 10. Способы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование.
2. Интегрирование через разложение.
3. Интегрирование через введение новой переменной.
4. Интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование состоит в применении формул, данных в таблице производных (см. стр. 238—239).

Интегрирование через разложение основано на том, что интеграл от суммы равен сумме интегралов.

Интегрирование через введение новой переменной выполняется по формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz, \qquad (11)$$

где $x=\varphi(z)$.

Для примера вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$.

Введем новую переменную t, определив ее по формуле (так называемая подстановка Эйлера) $\sqrt{a+x^2}=t-x$.

Отсюда

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{t}\right);\quad \sqrt{a+x^2}=\frac{t^2+a}{2t};\quad dx=\frac{1}{2}\frac{t^2+a}{t^2}\,dt,$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int \frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+C.$$

Интегрирование по частям выполняется по формуле

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du + C. \qquad (12)$$

Указанные выше правила интегрирования требуют уточнения для способов 3 и 4.

Замена переменной под знаком определенного интеграла выполняется следующим образом.

Если вместо x ввести новую переменную t по формуле

$$x=\varphi(t)$$

и если:

1) функция $\varphi(t)$ принимает значение a и b, когда переменная t принимает значения α и β, т. е. $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$;

2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ в промежутке α и β;

3) функция $f[\varphi(t)]$ непрерывна в промежутке $(\alpha\beta)$,

то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (13)$$

Если вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную $t=\psi(x)$, то пределы α и β определятся по формулам:

$$\alpha=\psi(a);\quad \beta=\psi(b).$$

Интегрирование по частям для случая определенного интеграла имеет такую форму:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \qquad (14)$$

Прямоугольные скобки или черта со знаками a и b обозначают подстановку с пределами a и b, а именно;

$$[f(x)]_a^b = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

А. Некоторые неопределенные интегралы

(постоянная интегрирования опущена)

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$; 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x$; 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$;

4. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$; 8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)$;

9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$; 10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$;

11. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \ln(x+a+\sqrt{2ax+x^2}) = \operatorname{Ar\,ch}\frac{x+a}{a}$;

13. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) =$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Ar\,sh}\left(\frac{x}{a}\right);$$

14. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$;

15. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$;

Тригонометрические функции:

16. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$; 17. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2a}\sin 2ax\right)$;

18. $\int \sin^3 ax\,dx = \frac{1}{4a}\left(\frac{1}{3}\cos 3ax - 3\cos ax\right)$;

19. $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{1}{an}\cos ax \sin^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$;

20. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$; 21. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2a}\sin 2ax\right)$;

22. $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{4a}\left(\frac{1}{3}\sin 3ax + 3\sin ax\right)$;

23. $\int \cos^n ax\,dx = \frac{1}{an}\sin ax \cos^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$;

24. $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax$; 25. $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax$;

26. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) = \frac{1}{2a}\ln\frac{1+\sin ax}{1-\sin ax}$;

27. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$;

28. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, $\frac{a-b}{a+b}>0$;

$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{Ar\,th}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, $\frac{a-b}{a+b}<0$;

29. $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$;

30. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$;

31. $\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)]$;

32. $\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)]$;

33. $\int \operatorname{arc\,sin} ax\,dx = x\operatorname{arc\,sin} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$;

34. $\int \operatorname{arc\,cos} ax\,dx = x\operatorname{arc\,cos} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$.

Примечание. x выражено в радианах; если x выражено в градусах, полученные результаты надо помножить на $57°,2957\ldots = \frac{180°}{\pi}$.

Рациональные алгебраические функции:

35. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}$ $a\neq b$;

36. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$, $b^2-4ac<0$;

$= \frac{-2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{Ar\,th}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$, $b^2-4ac>0$ и $2ax+b<\sqrt{b^2-4ac}$;

$= \frac{-2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{Ar\,cth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ $b^2-4ac>0$ и $2ax+b>\sqrt{b^2-4ac}$;

37. $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \frac{p}{2a}\ln(ax^2+bx+c) + \left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (см. выше);

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Ar\,sh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$, $a>0$, $b^2-4ac<0$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Ar\,ch}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$, $a>0$, $b^2-4ac>0$;

$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,cos}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$, $a<0$, $b^2-4ac>0$;

39. $\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{p}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (см. выше);

40. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b^2-4ac}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (см. выше).

Б. Некоторые определенные интегралы

1. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; 2. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{2a^2}$;

3. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $a>0$; 4. $\int e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$, $a>0$;

5. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}$, $a>0$; знак $+$; $a<0$; знак $-$

6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

7. $\int_0^\pi \sin mx\sin nx\,dx = \int_0^\pi \cos mx\cos nx\,dx = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, сообразно тому, будут ли целые числа m и n не равные или равные между собой,

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x} = \frac{\pi}{2ab}$; 9. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $a^2<1$;

10. $\int_0^\pi \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{1-a^2}$

§ 11. Вычисление площадей и длин дуг кривых

Если $y=f(x)$ есть кривая (см. рис. 188), то площадь S, ограниченная кривой, осью X и двумя ординатами aA и bB, соответствующими абсциссам $x=a$ и $x=b$, выражается определенным интегралом

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

если вся кривая расположена выше оси X-ов.

Пример. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=ax^2+bx+c$ и двумя ординатами y_1 и y_2, из коих первая совпадает с осью OY и расстояние между которыми обозначим через h.

$$S = \int_0^h (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^h = \frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch =$$
$$= \frac{1}{6}(2ah^3+3bh^2+6ch) = \frac{h}{6}(y_1+y_2+4y_m), \tag{2}$$

где y_m — есть ордината, соответствующая среднему значению между a и b, т. е.

$$y_m = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c.$$

Заметим, что формула (2) строго справедлива и для параболы третьей степени. В общем виде для всякой плавной кривой (рис. 189) формула (2) справедлива лишь приближенно и дает величину площади приближенно

$$S \approx \frac{(b-a)}{6}(y_1 + y_2 + 4y_m). \qquad (2)^*$$

Это так называемая формула Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла или площади ограниченной кривой.

Если кривая задана в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \quad (3)$$

где пределы α и β определяются уравнениями

$$a = \varphi(\alpha) \qquad b = \varphi(\beta).$$

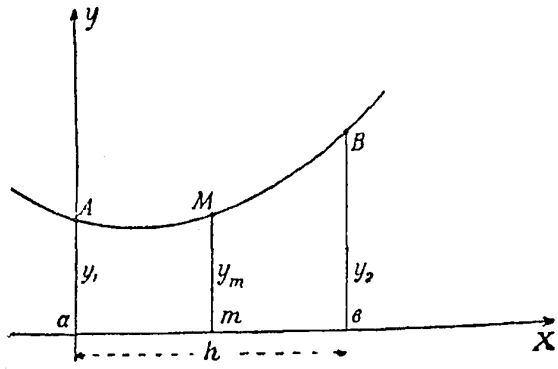


Рис. 189.

Пример. Найти площадь эллипса

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t$$

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin^2 t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \pi\frac{ab}{4}$$

$$S = \pi ab.$$

Если уравнение кривой задано в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

то площадь, ограниченная этой кривой и двумя радиусами-векторами соответствующими полярным углам φ_1 и φ_2,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi. \qquad (4)$$

Пример. Площадь логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2m\varphi}d\varphi = \frac{a^2}{4m}(e^{2m\varphi_2} - e^{2m\varphi_1}) = \frac{1}{4m}(r_2^2 - r_1^2).$$

Площадь сектора A *1, 2, 3, 4* (рис. 157, стр. 211) $\varphi_2=2\pi$ $\varphi_1=0$

$$S_1=\frac{a^2}{4m}(e^{4m\pi}-1).$$

Площадь сектора, описываемая радиусом-вектором при возрастании его от $0(\varphi=-\infty)$ до r, равна:

$$S_0=\frac{r^2}{4m},$$

т. е. будет величина конечная и равная половине площади треугольника OMT_0 (рис. 156).

Длина дуги AB плоской кривой, заданной уравнением $y=f(x)$

$$l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_A^B\sqrt{ax^2+dy^2}. \tag{5}$$

Если кривая задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\equiv\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{5}^*$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=f(\varphi)$, то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример. Длина дуги циклоиды

$$x=a(t-\sin t)=\varphi(t)$$
$$y=a(1-\cos t)=\psi(t)$$
$$l=\int_0^t\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^t\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt+2a\int_0^t\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$l=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^t=4a\left(1-\cos\frac{t}{2}\right).$$

Длина всей циклонды ($t=2\pi$) получается

$$L=8a.$$

§ 12. Формулы для вычисления средних значений $\sin^n x$ и $\cos^n x$ при изменении угла x от α_1 до α_2 ($\alpha_2>\alpha_1$)

x_i — значение x внутри m равных интервалов, на которые подразделен промежуток $\alpha_1\ldots\alpha_2$.

$i=1$

$$S_m^{(1)}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin x_i}{m}=\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}{\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}$$

$$C_m^{(1)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos x_l}{m} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}{\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}$$

$n=2$

$$S_m^{(2)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 x_l}{m} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\alpha_2+\alpha_1)\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)}\right]$$

$$C_m^{(2)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 x}{m} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(\alpha_2+\alpha_1)\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)}\right]$$

$S_m^{(2)} + C_m^{(2)} = 1$ для тех же пределов изменения углов.

$n=3$

$$S_m^{(3)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^3 x_l}{m} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^3 x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\frac{1}{12}(\cos 3\alpha_2 - \cos 3\alpha_1) - \frac{3}{4}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)}\left[-\frac{1}{6}\sin\frac{3}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{3}{2}(\alpha_2-\alpha_1) + \frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right.$$

$$C_m^{(3)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^3 x_l}{m} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^3 x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\frac{1}{12}(\sin 3\alpha_2 - \sin 3\alpha_1) + \frac{3}{4}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)}\left[\frac{1}{6}\cos\frac{3}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{3}{2}(\alpha_2-\alpha_1) + \frac{3}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]$$

разность $\alpha_2-\alpha_1$ должна быть выражена в радианах; а если ее выражать в градусах, то вместо $\alpha_2-\alpha_1$ следует писать $(\alpha_2-\alpha_1)^\circ \operatorname{arc} 1^\circ$.

§ 13. Приближенное вычисление определенных интегралов

Вычисление площадей, объемов, положения их центра тяжести и многие другие вопросы сводятся к нахождению некоторых определенных интегралов.

Поэтому покажем, как вычислить определенный интеграл независимо от того, что он собою представляет, предполагая, что квадратуру, указанную в интеграле, выполнить нельзя или потому, что она не берется, или потому, что сама функция задана рядом табличных чисел или даже прямо графически, что в Теории корабля, например, обычно.

Положим, надо вычислить величину определенного интеграла

$$S = \int_a f(x)\,dx.$$

Какое бы количество этот интеграл ни представлял, всегда можно вообразить такую кривую, уравнение которой было бы

$$y = f(x).$$

Тогда интеграл S представит собой площадь $ABCD$, ограниченную осью X-ов, двумя ординатами AB и CD и кривой BC, т. е. эта площадь $ABCD$ и будет численно равна интегралу S (рис. 190)

Чтобы найти площадь $ABCD$, один из простейших приемов состоит в том, что основание $b-a=AD$ делят на несколько равных частей

$$\frac{a-b}{n}=h,$$

через точки делений $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{n-1}$, K_n проводят ординаты

$$y_2, y_3, y_4, \ldots, y_{n-1}, y_n$$

и точки пересечения этих ординат с кривой $BC-E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{n-1}$, E_n соединяют последовательно прямыми линиями $BE_1, EE_2, \ldots, E_{n-1}C$ и вместо площади $ABCD$ берут сумму площадей трапеций

$$ABE_1K_1,\ K_1E_1E_2K_2, \ldots, K_nE_nCD.$$

Общая площадь этих трапеций легко может быть вычислена по формуле

$$h\left(\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n+\frac{1}{2}y_{n+1}\right),$$

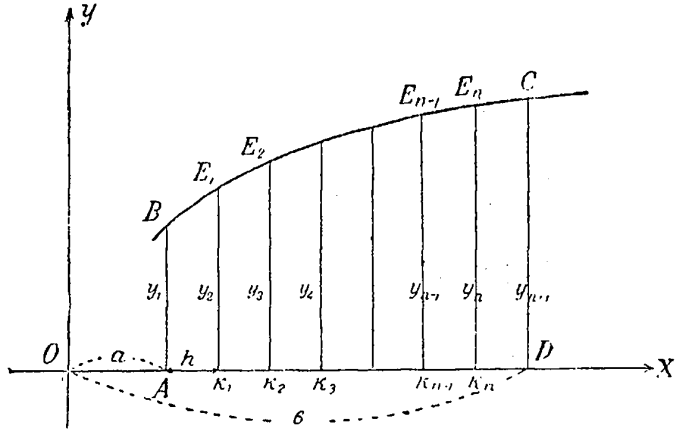


Рис. 190.

а потому и сам этот способ приближенного вычисления определенного интеграла S носит название способа трапеций.

1. **Формула трапеций** $y=f(x)$

$$\int_a^b y\,dx=\frac{(b-a)}{n}\left[\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}+y_n+\frac{1}{2}y_{n+1}\right]=$$

$$=\frac{(b-a)}{n}\left[\sum_{i=1}^{i=n+}y_i-\frac{1}{2}(y_1+y_{n+1})\right]$$

Интервал $(b-a)$ делим на n равных частей и для всех этих значений переменной берем ординаты $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$, так как всех ординат, включая $y_1=f(a)$ и $y_{n+1}=f(b)$ будет $(n+1)$.

2. **Формула Симпсона.** Другой, более точный прием основан на замене частей данной кривой не хордами, а дугами парабол, оси которых параллельны оси Y-ов. Получаемая таким путем фор-

мула называется формулой Симпсона. Применяя последовательно формулу Симпсона, приведенную в § 11, получим легко

$$\int_a^b y\,dx = \frac{(b-a)}{6n}[y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \ldots + 2y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1}].$$

Интервал $(b-a)$ делим на $2n+1$ равных частей и для каждого значения переменной независимой находим ординаты

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}, y_{2n+1}.$$

3. **Формула Чебышева**

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{n}[f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + \ldots + f(X_n)]$$

В этой формуле величины функции $f(X_i)$ соответствуют некоторым определенным значениям аргумента X_i, различным при разном числе n ординат. Если аргументы x считать однообразно в одну сторону, то значения абсцисс X_i даны в приведенной ниже таблице (А), в левой ее части. В такой форме удобно находить абсциссы, если функция $y=f(x)$ задана рядом табличных значений. Если функция задается графически, то удобнее начало координат считать в точке M, абсцисса которой

$$X_m = \frac{1}{2}(a+b),$$

и отсчитывать абсциссы вправо и влево от этой точки от -1 до $+1$.

Абсциссы в формуле Чебышева

$n=2$ (А)	$n=2$ (Б)
$X_1 = a + 0{,}211325\,(b-a)$	$x_1 = -0{,}577350$
$X_2 = a + 0{,}788675\,(b-a)$	$x_2 = +0{,}577350$
$n=3$	$n=3$
$X_1 = a + 0{,}146447\,(b-a)$	$x_1 = -0{,}707107$
$X_2 = a + 0{,}5\,(b-a)$	$x_2 = 0{,}0$
$X_3 = a + 0{,}853553\,(b-a)$	$x_3 = +0{,}707107$
$n=4$	$n=4$
$X_1 = a + 0{,}102673\,(b-a)$	$x_1 = -0{,}794654$
$X_2 = a + 0{,}406204\,(b-a)$	$x_2 = -0{,}187592$
$X_3 = a + 0{,}593796\,(b-a)$	$x_3 = +0{,}187592$
$X_4 = a + 0{,}897327\,(b-a)$	$x_4 = +0{,}794654$
$n=5$	$n=5$
$X_1 = a + 0{,}083751\,(b-a)$	$x_1 = -0{,}832498$
$X_2 = a + 0{,}312730\,(b-a)$	$x_2 = -0{,}374541$
$X_3 = a + 0{,}5\,(b-a)$	$x_3 = 0{,}0$
$X_4 = a + 0{,}687270\,(b-a)$	$x_4 = +0{,}374541$
$X_5 = a + 0{,}916249\,(b-a)$	$x_5 = +0{,}832498$
$n=6$	$n=6$
$X_1 = a + 0{,}066877\,(b-a)$	$x_1 = -0{,}866247$
$X_2 = a + 0{,}288740\,(b-a)$	$x_2 = -0{,}422519$
$X_3 = a + 0{,}366682\,(b-a)$	$x_3 = -0{,}266635$
$X_4 = a + 0{,}633318\,(b-a)$	$x_4 = +0{,}266635$
$X_5 = a + 0{,}711260\,(b-a)$	$x_5 = +0{,}422519$
$X_6 = a + 0{,}933123\,(b-a)$	$x_6 = +0{,}866247$

Обозначая их в этом случае буквами x_i, получим значения их в той же таблице в правой половине, обозначенной (Б).

Формула Чебышева сохраняет такую же форму, как и выше, но вместо X_l надо написать x_l, т. е. будем иметь

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{n}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

Само собой разумеется, что в случае задания функции $f(x)$ графически для получения абсцисс в линейной мере, считаемых от средней абсциссы числа x_l, данные выше надо умножать на $\frac{1}{2}(b-a)$.

При том же числе ординат формула Чебышева дает большую точность, чем приведенные выше формулы приближенных квадратур.

Пример. Для сравнения вычислим средние значения sin-а для пределов углов от $\alpha_1 = 20°$ до $\alpha_2 = 30°$ по приближенным квадратурам, ограничив число ординат в каждом способе пятью.

Формула точная

$$S_m^{(1)} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin x\,dx}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_1)\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}{\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

1) Формула трапеций $n=4$.

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{l=n+1} y_l - \frac{1}{2}(y_1+y_{n+1})\right].$$

№№ ординат	x	y
1	20°	$y_1 = 0{,}342020$
2	22½°	$y_2 = \ ,382683$
3	25°	$y_3 = \ ,422618$
4	27½°	$y_4 = \ ,461749$
5	30°	$y_5 = \ ,500000$

$$\Sigma = 2{,}109070$$
$$-\frac{1}{2}(y_1+y_5) = -0{,}421010$$
$$1{,}688060$$
$$S_m^{(1)} = 0{,}422015$$

2) Формула Симпсона $n=2$.

№№ ординат	x	y
1	20°	$y_1 = 0{,}342020 \times 1 = 0{,}342020$
2	22½°	$y_2 = 0{,}382683 \times 4 = 1{,}530732$
3	25°	$y_3 = 0{,}422618 \times 2 = 0{,}845236$
4	27½°	$y_4 = 0{,}461749 \times 4 = 1{,}846996$
5	30°	$y_5 = 0{,}500000 \times 1 = 0{,}500000$

$$\Sigma = 5{,}064984$$
$$S_m^{(1)} = 0{,}422081$$

3) Формула Чебышева.

$$\begin{array}{llll} x_1 = 20^\circ + 0{,}083751 \times 10^\circ = 20^\circ{,}83751 = 20^\circ 50' 15'',04 & y_1 = 0{,}355719 \\ x_2 = 20 + 0{,}312729 \times 10 = 23\ ,12729 = 23\ \ 7\ 38\ ,24 & y_2 = 0{,}392775 \\ x_3 = 20 + 0{,}5 \quad\ \times 10 = 25\ ,00000 = 25\ \ 0\ \ 0\ ,00 & y_3 = 0{,}422618 \\ x_4 = 20 + 0{,}687271 \times 10 = 26\ ,87271 = 26\ 52\ 21\ ,76 & y_4 = 0{,}452010 \\ x_5 = 20 + 0{,}916249 \times 10 = 29\ ,16249 = 29\ \ 9\ 44\ ,96 & y_5 = 0{,}487288 \\ & \Sigma = 2{,}110410 \\ & S_m^{(1)} = 0{,}422082 \end{array}$$

Точная величина

$$S_m^{(1)} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 30^\circ}{10^\circ \text{ arc } 1^\circ} = \frac{0{,}073668}{0{,}174533} = 0{,}422086.$$

Таким образом, ошибки указанных формул в этом частном случае будут:

Формула трапеций $\Delta = +0{,}000071$
" Симпсона $\Delta = +0{,}000005$
" Чебышева $\Delta = +0{,}000004$.

§ 14. Интегрирование линейных диференциальных уравнений 1-го порядка

Линейным уравнением 1-го порядка называют уравнения вида

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0, \tag{1}$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ буквы y или y' не содержат.

Общее решение уравнения (1) имеет форму:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C - \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx\right], \tag{2}$$

где C — постоянная произвольная интегрирования.

В разных практических вопросах физического характера требуется не только определить общий интеграл диференциального уравнения (1), но и определить входящую произвольную постоянную C так, чтобы были удовлетворены так называемые начальные условия, т. е. чтобы при $x = x_0$ (начальное значение переменной независимой) функция y принимала определенное начальное значение $y = y_0$.

Все выкладки упрощаются, если можно x_0 принимать равным нулю при начальных условиях.

Если начальные условия таковы, что при $x = x_0$ $y = y_0$, то (2) можно написать в виде:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[y_0 - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} Q(x)\,dx\right]. \tag{2}^*$$

Частный случай, когда $Q(x) = 0$ и $P(x) = k =$ постоянной величине.

Тогда уравнение (1) принимает простейший вид:

$$y' + ky = 0,$$

а интеграл его будет

$$y = Ce^{-kx}, \tag{2}^{**}$$

что легко получить непосредственно.

Пример 1. Найти силу тока i в устанавливающемся процессе переменного тока в цепи с самоиндукцией.

Пусть i — сила тока, E — напряжение, R — сопротивление цепи и L — коэфициент самоиндукции; тогда, как известно, для решения задачи служит диференциальное уравнение первого порядка

$$L\frac{di}{dt}+Ri-E=0.$$

Переписав его в виде

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i-\frac{E}{L}=0, \tag{3}$$

видим, что написанное уравнение принадлежит к типу (1), где надо вместо переменной x считать время t; функция $P(t)=\frac{R}{L}$ будет величина постоянная, а функция $Q(t)=\frac{E}{L}$ может быть как постоянная, так и функция времени.

Обозначая через i_0 начальное значение силы тока при $t_0=0$, получим общее решение:

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0+\frac{1}{L}\int_0^t Ee^{\frac{R}{L}t}\,dt\right), \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию.

Рассмотрим частные случаи.

а) Напряжение $E=\text{const}$, тогда

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left[i_0+\frac{E}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t}-1\right)\right]$$

или

$$i=\left(i_0-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E}{R}.$$

При возрастании t множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ быстро убывает и через короткий промежуток времени процесс можно считать установившимся, причем сила тока определится по закону Ома $i=\frac{E}{R}$.

б) Напряжение $E=A\sin\omega t$, т. е. напряжение изменяется по синусоидальному закону. Тогда формула (4) дает

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left[i_0+\frac{A}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt\right].$$

Пользуясь формулой (31) в таблице некоторых интегралов (стр. 257), получим окончательно:

$$i=\left(i_0+\frac{\omega LA}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{A}{\omega^2L^2+R^2}\{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t\}. \tag{5}$$

Пример 2. Найти решение уравнения $y'=\frac{xy}{2}$, если при $x=0$ $y_0=1$.

В данном случае $P(x)=-\frac{x}{2}$, $Q(x)=0$

и формула (2) дает прямо

$$y=e^{+\int_0^x\frac{x\,dx}{2}}[1-0]=e^{\frac{x^2}{4}}.$$

§ 15. Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэфициентами

А. Уравнения без последнего члена (однородные)

Обычная форма *) линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэфициентами без последнего члена будет следующая:

$$y'' + 2hy' + n^2 y = 0; \tag{1}$$

h и n — постоянные числа.

Будем искать частные решения этого уравнения (частные интегралы) в форме:

$$y = e^{rx}, \tag{2}$$

где x — переменная независимая, а r — некоторое вещественное или комплексное число, и определим это последнее из условия, чтобы решение (2) удовлетворяло уравнению (1). Диференцируя (2) и подставляя значения производных и функции в данное уравнение (1), найдем:

$$e^{rx}(r^2 + 2hr + n^2) = 0.$$

Отсюда видно, что искомое решение (2) будет уловлетворять предложенному уравнению (1), если r есть корень квадратного уравнения

$$r^2 + 2hr + n^2 = 0, \tag{3}$$

которое называется характеристическим уравнением для данного диференциального уравнения, потому что характер решения этого последнего определяет форму решения диференциального уравнения (1).

Корни характеристического уравнения (3) будут:

$$r_1 = -h + \sqrt{h^2 - n^2}$$
$$r_2 = -h - \sqrt{h^2 - n^2}.$$

Здесь возможны три случая:

1. Корни r_1 и r_2 вещественные и неравные.
2. Корни r_1 и r_2 вещественные и равные ($r_1 = r_2$).
3. Корни r_1 и r_2 комплексные и сопряженные.

1-й случай

Корни характеристического уравнения вещественные и неравные. Для этого необходимо, чтобы было $h > n$.

В этом случае частные решения уравнения (3) будут:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{r_2 x},$$

а потому общий интеграл уравнения (1) будет:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

*) Совершенно аналогично тому, как здесь указано, решается однородное диференциальное уравнение 2-го порядка, данное в общей форме

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2-й случай.

Корни характеристического уравнения вещественные и равные. Это будет в том случае, когда $h = n$ и корни будут

$$r_1 = r_2 = -h$$

и соответственно этому частное решение диференциального уравнения (1)

$$y_1 = e^{-hx}.$$

Второе частное решение будет иметь вид:

$$y_2 = xe^{-hx},$$

а потому общий интеграл уравнения (1) будет:

$$y = e^{-hx}(C_1 + C_2 x). \qquad \text{(II)}$$

3-й случай.

Корни характеристического уравнения мнимые и сопряженные. Для этого необходимо, чтобы $h < n$, тогда корни r_1 и r_2 будут равны:

$$r_1 = -h + i\sqrt{n^2 - h^2},$$

$$r_2 = -h - i\sqrt{n^2 - h^2},$$

а потому частные решения уравнения (1) будут:

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(-h + i\sqrt{n^2 - h^2})x} = e^{-hx}[\cos x\sqrt{n^2 - h^2} + i \sin x\sqrt{n^2 - h^2}]$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(-h - i\sqrt{n^2 - h^2})x} = e^{-hx}[\cos x\sqrt{n^2 - h^2} - i \sin x\sqrt{n^2 - h^2}],$$

а общий интеграл

$$y = e^{-hx}(C_1 \cos x\sqrt{n^2 - h^2} + C_2 \cdot \sin x\sqrt{n^2 - h^2}). \qquad \text{(III)}$$

Б. Уравнения с последним членом (неоднородные)

Общий вид такого уравнения:

$$y'' + 2hy + n^2 y = F(x). \qquad (4)$$

В большинстве случаев, встречающихся на практике, функция $F(x)$ имеет вид: $a \sin(kx + \gamma)$.

Интегрирование уравнений такого вида выполняется следующим приемом.

Сначала ищут общий интеграл уравнения (4), но без последнего члена, руководствуясь правилами, данными выше, а затем ищут частное решение Y уравнения (4) в таком же виде, какова форма последнего члена, т. е. в виде:

$$Y = H \sin(kx + \gamma + \delta),$$

где постоянные величины H и δ определяют из условия, чтобы величина Y удовлетворяла предложенному уравнению с последним членом (4).

Диференцируя это выражение два раза и подставляя в уравнение (4), найдем два уравнения для определения постоянных H и δ:

$$H\{(n^2 - k^2)\cos\delta - 2hk \sin\delta\} = a$$

$$H\{(n^2 - k^2)\sin\delta + 2hk \cos\delta\} = 0.$$

Так как $H \neq 0$, то второе уравнение определяет начальную фазу δ

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2hk}{n^2 - k^2}, \tag{5}$$

а первое дает величину амплитуды H

$$H = \frac{a}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2}}. \tag{6}$$

Поэтому общий интеграл уравнения (4) имеет форму:

$$y = e^{-hx}(C_1 \cos x\sqrt{n^2 - h^2} + C_2 \sin x\sqrt{n^2 - h^2}) + H\sin(kx + \gamma + \delta), \text{ (IV)}$$

где H и δ имеют указанные выше значения.

Рассмотрим несколько частных случаев, имеющих, однако, большое значение в различных технических вопросах.

1. Уравнение вида

$$y'' - n^2y = 0. \tag{7}$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - n^2 = 0$$

имеет корни

$$r_1 = +n \quad \text{и} \quad r_2 = -n.$$

Поэтому общий интеграл этого уравнения будет:

$$y = C_1e^{nt} + C_2e^{-nt} = B_1\operatorname{sh}nt + B_2\operatorname{ch}nt. \tag{8}$$

За переменную независимую мы здесь считаем, как обычно в таких вопросах, время t.

2. Уравнение вида

$$y'' + n^2y = 0 \tag{9}$$

представляет собой простое гармоническое колебательное движение всякой материальной системы.

Характеристическое уравнение

$$r^2 + n^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни

$$r_1 = ni \text{ и } r_2 = -ni,$$

поэтому общий интеграл имеет вид:

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt \tag{10}$$

или в другой форме:

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_0\right), \tag{11}$$

если положить

$$C_1 = A\sin\alpha_0 \quad \text{и} \quad C_2 = A\cos\alpha_0.$$

Постоянные A и α_0 имеют определенный механический смысл, именно:

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ — амплитуда колебаний

$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{C_1}{C_2}$ — начальная фаза колебания

$T = \frac{2\pi}{n}$ — период колебаний (свободных) системы.

$n=\frac{1}{T}$ — частота колебаний, т. е. число колебаний системы в единицу времени.

Подобно постоянным интегрирования C_1 и C_2 величины A и α_0 определяются по начальным условиям движения, которые в разных задачах могут быть различны.

Пример. Пусть условия задачи таковы: в начальный момент

$$t=0, \qquad y=y_0 \qquad \text{и} \qquad y'=y_0',$$

тогда

$$C_1=y_0 \qquad \text{и} \qquad C_2=\frac{y_0'}{n}.$$

Таким образом решение уравнения (9), удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид:

$$y=y_0\cos nt+\frac{y_0'}{n}\sin nt. \tag{12}$$

Если решение уравнения (9) взять в виде (11), то через начальные условия амплитуда A и начальная фаза α_0 представятся так:

$$\left.\begin{aligned} A&=+\sqrt{y_0^2+\left(\frac{y_0'}{n}\right)^2}\\ \alpha_0&=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{ny_0}{y_0'}\right)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Можно начальные условия задать иначе. За начальный момент можно принять тот, когда y достигает наибольшей величины, которую попрежнему обозначим через A; в этот момент $y'=0$ и начальные условия будут:

$$\text{при } t=0 \qquad C_1=y_0=A \qquad \text{и} \qquad C_2=0$$

и решение уравнения (9) представится в таком виде:

$$y=A\cos nt=A\cos\frac{2\pi t}{T}. \tag{14}$$

Как видно, амплитуда A и начальная фаза α_0 зависят от начальных условий.

3. Уравнение вида

$$y''+2hy'+n^2y=0 \tag{15}$$

представляет собой гармоническое колебательное движение при пропорциональной первой степени скорости сопротивления среды, так называемое затухающее колебание.

Общий ход решения указан выше; возможны три случая, в зависимости от численного соотношения между коэфициентами h и n.

а) $h^2<n^2$.

Как указано выше, общий интеграл будет:

$$y=e^{-ht}\left[C_1\cos\left(t\sqrt{n^2-h^2}\right)+C_2\sin\left(t\sqrt{n^2-h^2}\right)\right] \tag{16}$$

или при прежних обозначениях для A и α

$$y=Ae^{-ht}\sin\left(t\sqrt{n^2-h^2}\right)+\alpha_0). \tag{17}$$

Ae^{-ht} есть амплитуда, убывающая с течением времени, т. е. имеем затухающее колебательное движение. Частота этого движения равна

$\sqrt{n^2-h^2}$ или период $T=2\pi:\sqrt{n^2-h^2}$.

Геометрически затухающий колебательный процесс представлен на рис. 134, стр. 188, а детали и подробности этого движения изложены в § 9 главы 5.

б) $h^2=n^2$.

$$y=e^{-ht}(C_1+C_2t). \tag{18}$$

в) $h^2>n^2$. (апериодическое движение; большое сопротивление)

$$y=e^{-ht}\left[C_1e^{t\sqrt{h^2-n^2}}+C_2e^{-t\sqrt{h^2-n^2}}\right] \tag{19}$$

или

$$y=e^{-ht}\left[B_1\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{h^2-n^2}\right)+B_2\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{h^2-n^2}\right)\right]. \tag{19*}$$

Постоянные интегрирования определяются аналогично предыдущему случаю, сообразно начальным условиям задачи.

4. Уравнение вида

$$y''+n^2y=a\cdot\sin(kt+\gamma) \tag{20}$$

соответствует случаю гармонического колебательного движения при отсутствии сопротивления, когда материальная система находится под влиянием периодической возмущающей силы, частота которой k и амплитуда a.

Общий интеграл определяют приемом, указанным в п. II, или, полагая $h=0$ в формуле (IV) и (6), получим непосредственно

$$y=C_1\cos nt+C_2\sin nt+\frac{a}{n^2-k^2}\sin(kt+\gamma). \tag{21}$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным обстоятельствам движения.

Например, если при $t=0$

$$y=y_0 \quad \text{и} \quad y'=y_0',$$

то решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, будет:

$$y=G\cos nt+F\sin nt+\frac{a}{n^2-k^2}\sin(kt+\gamma), \tag{22}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G&=y_0-\frac{a}{n^2-k^2}\sin\gamma=C_1\\ F&=\frac{1}{n}y_0'-\frac{k}{n(n^2-k^2)}a\cos\gamma=C_2\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если положить, как в случае 1,

$$\left.\begin{aligned} G&=A\sin\alpha_0\\ F&=A\cos\alpha_0\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

то найдем решение в виде:

$$y = A\sin(nt+\alpha_0) + \frac{a}{n^2-k^2}\sin(kt+\gamma) \qquad (21)^*$$

или еще так, если ввести периоды T и τ вместо частот n и k:

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\tau},$$

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha_0\right) + \frac{a}{4\pi^2}\frac{T^2\tau^2}{\tau^2-T^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\gamma\right). \qquad (21)^{**}$$

Первый член представляет простое гармоническое колебательное движение с амплитудой A, периодом T и начальной фазой α_0. Эти колебания называются свободными колебаниями системы; амплитуда таких колебаний A и начальная фаза α_0 зависят от начальных условий движения.

Второй член зависит от интенсивности a „возмущающей" силы и не зависит от начальных условий и представляет собой также гармоническое периодическое колебательное движение, которое называют вынужденным. Период вынужденных колебаний равен периоду τ возмущающей силы; амплитуда A_1 вынужденных колебаний

$$A_1 = \frac{a}{n^2-k^2} \qquad (25)$$

и зависит от амплитуды a возмущающей силы и от периодов или частот свободного колебания $n = \frac{2\pi}{T}$ и возмущающей силы $k = \frac{2\pi}{\tau}$.

Начальные фазы γ возмущающей силы и вынуждаемых ею колебаний в этом случае равны.

Заметим, что решение теряет смысл в том случае, когда $k = n$, так как знаменатель в выражении для A_1 делается равным нулю. В этом случае общий интеграл уравнения (20) имеет вид:

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt - \frac{a}{2n}t\cos(nt+\gamma). \qquad (26)$$

Как видно, в том случае, когда период вынужденных колебаний $\tau = \frac{2\pi}{k}$ равен периоду $T = \frac{2\pi}{n}$ свободных колебаний системы или равны их частоты, амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает, так как агрумент (обычно время в задачах механики) выходит из-под знака периодической функции cos-а и делается множителем при амплитуде вынужденных колебаний.

Это явление известно под названием резонанса. К этому вопросу мы вернемся ниже при рассмотрении колебательных процессов при наличии сопротивления, как на самом деле в природе и случается.

Характер амплитуды вынужденных колебаний. Если на систему действует постоянная сила, интенсивность которой обозначим через a, то она займет положение равновесия, определяемое условием:

$$n^2 y_0 = a,$$

т. е. его отклонение y_0 будет:

$$y_0 = \frac{1}{n^2}a.$$

Величина y_0 представляет то статическое отклонение, которое произвела бы постоянная сила, интенсивность которой равна a. Заменяя в A_1 величину a через n^2y_0, получим

$$A_1 = \frac{n^2}{n^2 - k^2} y_0 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - T^2} y_0 = y_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2}. \qquad (27)$$

Отсюда видно, что амплитуда A_1 вынужденных колебаний равна статическому отклонению y_0, умноженному на величину $\frac{\tau^2}{\tau^2 - T^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2}$, откуда следует:

1) Если период свободных колебаний системы (T) весьма мал по сравнению с периодом возмущающей силы (τ), то амплитуда вынужденных колебаний весьма близка к статическому отклонению, производимому этой силой.

2) Если период свободных колебаний системы (T) весьма велик по сравнению с периодом возмущающей силы (τ), то амплитуда вынужденных колебаний весьма мала по сравнению со статическим отклонением, т. е. система будет весьма мало отклоняться от своего естественного положения равновесия $y = 0$.

3) Если отношение периода свободных колебаний системы (T) и возмущающей силы (τ) близко к единице, то амплитуда вынужденных колебаний значительно больше статического отклонения и по мере приближения этого отношения к единице неопределенно возрастает. В этом состоит так называемое явление резонанса, с которым приходится встречаться в самых разнообразных явлениях природы, где имеется тот или иной колебательный процесс, как, например, во множестве случаев механических колебаний разных материальных систем, в электрических колебаниях, в явлениях звука и т. д.

5. Уравнения вида

$$y'' + 2hy' + n^2y = a \cdot \sin(kt + \gamma) \qquad (28)$$

соответствуют колебательному процессу в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости, при действии на систему внешней периодической силы, амплитуда которой a и частота колебаний k.

Общий интеграл этого уравнения, как указано в п. Б (стр. 268), будет:

$$y = e^{-ht}\left(C_1 \cos t\sqrt{n^2 - h^2} + C_2 \sin t\sqrt{n^2 - h^2}\right) + \\ + \frac{a}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2}} \sin(kt + \gamma + \delta). \qquad (29)$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным условиям. Если при $t = 0$, $y = y_0$ и $y' = y'_0$, то

$$\left.\begin{aligned} G = C_1 &= y_0 - \frac{a}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2}} \sin(\gamma + \delta) \\ F = C_2 &= \frac{y_0' + hy_0}{\sqrt{n^2 - h^2}} - \frac{a}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2}} \frac{(h \sin(\gamma + \delta) + k \cos(\gamma + \delta)}{\sqrt{n^2 - h^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Положив еще попрежнему

$$G = A \sin \alpha_0$$
$$F = A \cos \alpha_0,$$

получим общее решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y = Ae^{-ht}\sin\left[t\sqrt{n^2-h^2} + \alpha_0\right] + A_1\sin(kt+\gamma+\delta). \qquad (29)^*$$

Первое слагаемое есть колебание свободное затухающее с частотой $\sqrt{n^2-h^2}$ или периодом $T=\frac{2\pi}{\sqrt{n^2-h^2}}$ и с амплитудой Ae^{-ht}, убывающей с течением времени. Второе слагаемое есть вынужденное колебание под влиянием возмущающей силы.

Период τ вынужденных колебаний $\tau=\frac{2\pi}{k}$ равен периоду возмущающей силы, как обычно. Амплитуда A_1 вынужденных колебаний и начальная фаза δ определяются следующим образом:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{-2kh}{n^2-k^2};\quad A_1 = \frac{a}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}} \qquad (30)^*$$

и не зависят от начальных условий движения.

Отсюда видно, что по истечении достаточно большого промежутка времени свободные колебания системы затухнут, а останутся только вынужденные с амплитудой A_1 и с начальной фазой $\delta+\gamma$.

Однако, такое заключение справедливо только в том случае, если период возмущающей силы остается строго постоянным. Если же периоды последовательных циклов возмущающей силы даже немного разнятся один от другого, то свободные колебания не погашаются, а все время поддерживаются, так как начальные условия для второго цикла представят собой конечные обстоятельства движения первого цикла и т. д.

Характер начальной фазы δ.

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2hk}{n^2-k^2}\right).$$

1) Если $n>k$, то фаза $\delta<0$, т. е. если частота свободных колебаний n (при отсутствии сопротивления) больше частоты возмущающей силы, или $T<\tau$, то вынужденные колебания запаздывают относительно колебаний возмущающей силы (при $t=0$ фаза силы равна $\gamma>0$, а фаза колебаний δ будет отрицательное число).

2) Если $n<k$ или $T>\tau$, то фаза $\delta>0$, т. е. если частота собственных (свободных) колебаний меньше, чем частота колебаний возмущающей силы, то вынужденные колебания опережают фазу возмущающей силы.

3) Если $n=k$, т. е. если частоты свободных колебаний системы и возмущающей силы равны, то разность фаз $\delta=\frac{\pi}{2}$.

Характер амплитуды A_1 вынужденных колебаний. Рассмотрим, как и выше, статическое отклонение $y_0=\frac{a}{n^2}$; тогда амплитуда A_1 вынужденных колебаний будет равна:

$$A_1 = \frac{n^2 y_0}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4h^2k^2}} = \lambda\cdot y_0,$$

где множитель λ, показывающий отношение амплитуды вынужденных колебаний A_1 к статическому отклонению y_0, равен:

$$\lambda = \frac{n^2}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4h^2k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^2+\frac{4h^2}{n^2}\cdot\frac{k^2}{n^2}}}. \qquad (31)$$

Положив еще

$$\frac{2h}{n}=\alpha \quad \text{и} \quad \frac{k}{n}=\frac{T}{\tau}=q, \tag{32}$$

получим

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2+\alpha^2q^2}}. \tag{31}*$$

Как видно, этот множитель есть функция двух переменных

$$q=\frac{T}{\tau}=\frac{k}{n} \text{ и } \alpha=\frac{2h}{n},$$

показывающих отношение периодов или частот свободных колебаний системы и возмущающей силы и отношение сопротивления движению к частоте собственных колебаний системы.

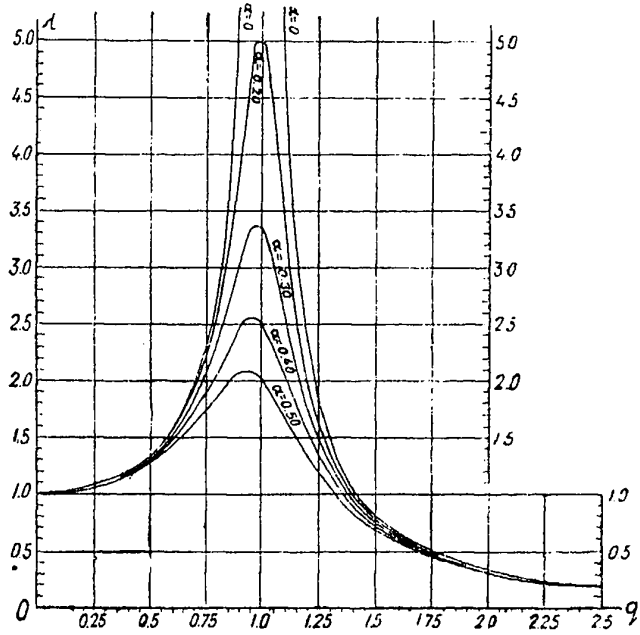


Рис. 191.

На рис. 191 представлены разные кривые λ в функции переменной q для разных значений α, показанных на самих кривых.

Рис. 191 с ясностью обнаруживает явление резонанса, состоящее в том, что величина λ быстро возрастает при приближении q к 1 и, достигнув резкого максимума, при дальнейшем увеличении q также быстро падает.

Как видно, сопротивление (величина α) оказывает некоторое влияние на величину наибольшей амплитуды A_1 при значениях периодов или частот, близких к равенству.

§ 16. Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка с постоянными коэфициентами

Общий вид дифференциального уравнения 3-го порядка таков:

$$y'''+ay''+by'+cy=F(t). \tag{1}$$

В теории гирокомпасов встречаются такие уравнения, причем последний член или равен нулю, или величина постоянная; коэфициенты a, b и c — величины постоянные; переменная независимая t — время; производные взяты по t.

1) Будем искать решение уравнения без последнего члена

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

в форме

$$y = e^{rt}. \tag{3}$$

Подобно уравнениям 2-го порядка получим характеристическое уравнение третьей степени

$$r^3 + ar^2 + br + c = 0, \tag{4}$$

служащее для определения неизвестной r.

Пусть корни уравнения (4) будут r_1, r_2 и r_3, тогда общий интеграл уравнения (2) имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} + B_3 e^{r_3 t},$$

где C_1, B_2 и B_3 — постоянные интегрирования.

Решение кубических уравнений показано в отделе 1, глава 1, § 27. Там же указано, что в зависимости от численных соотношений между коэфициентами a, b и c корни могут быть или все три вещественные, или один вещественный и два мнимых сопряженных. Последний случай именно соответствует случаю гиросферы компаса Аншютца.

Обозначим через r_1 вещественный корень, а r_2 и r_3 мнимые

$$r_2 = h + ki \quad \text{и} \quad r_3 = h - ki,$$

тогда общий интеграл уравнения (2) будет:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + e^{ht}(C_2 \cos kt + C_3 \sin kt). \tag{5}$$

Замечание относительно знаков величин r_1 и n и метода численного решения кубического уравнения (4)

Коэфициенты характеристического уравнения (4) для гиросферы таковы:

$$a = +1{,}5 \times 10^{-3}; \quad b = 1{,}542 \times 10^{-6}; \quad c = 0{,}9252 \times 10^{-9}$$

(см. Б. И. Кудревич. Дополнительные вопросы теории гирокомпасов и гировертикалей, Л., 1941. Изд. В.-М. академии, стр. 44).

Для численного решения уравнения (4), действуя согласно формулам § 27 главы 1, полагаем:

$$r = z - \frac{a}{3}$$

и получим неполное уравнение (приведенное)

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{6}$$

где коэфициенты p и q равны:

$$p = -\frac{a^2}{3} + b \quad \text{и} \quad q = \frac{a}{3}\left(\frac{2}{9}a^2 - b\right) + c.$$

или для рассматриваемого случая:

$$p=-\frac{2,25}{3}\times 10^{-6}+1,542\times 10^{-6}=(-0,75+1,542)\times 10^{-6}=$$
$$=+0,792\times 10^{-6}>0;$$
$$q=0,5\times 10^{-3}\left(\frac{2}{9}\cdot 2,25\times 10^{-6}-1,542\times 10^{-6}\right)+0,9252\times 10^{-9}=$$
$$=+0,4042\times 10^{-9}>0.$$

Поэтому корни z_1, z_2 и z_3 уравнения (4) согласно формулам (7) § 27, отд. 1, будут:

$$z_1=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$$
$$z_2=+\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{p}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$$
$$z_3=+\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{p}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3},$$

где

$$\operatorname{sh}\varphi=\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}=\frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{3/2}.$$

Корни же характеристического уравнения (6) соответственно будут:

$$r_1=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-\frac{a}{3}<0$$
$$r_2=\left(+\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-\frac{a}{3}\right)+i\sqrt{p}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$$
$$r_3=\left(+\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-\frac{a}{3}\right)-i\sqrt{p}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}.$$

Вещественная часть комплексных корней, обозначенная выше через h, оказывается равной

$$h=+\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-\frac{a}{3},$$

а мнимая

$$k=\sqrt{p}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}.$$

Для практики решения таких уравнений, встречающихся в технических вопросах, найдем все корни r_1, r_2 и r_3, применяя для численных выкладок гиперболические функции (см. гл. 4, отд II).

$q=+0,4042\times 10^{-9}$ $\quad$ $p=+0,792\times 10^{-6}$

$\frac{q}{2}=+0,2021\times 10^{-9}$ $\quad$ $p\ldots$ 9,8987 — 6

$\quad$ $3\ldots$ 0,4771

$\frac{q}{2}\ldots$ 9,3056 — 9 $\quad$ $\frac{3}{p}\ldots$ 0,5784 + 6

$\quad$ 0,2892 + 3

$\left(\frac{3}{p}\right)^{1/2}\ldots$ 0,8676 + 9 $\quad$ $\left(\frac{3}{p}\right)^{3/2}\ldots$ 0,8676 + 9

$\operatorname{sh}\varphi\ldots$ 0,1732

$\varphi=1,1892$

$\frac{\varphi}{3}=0,3964$

$\lg\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}=9,6094$

$\lg\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}=0,0333$

Находим сначала вещественную часть мнимых корней n:

$$\frac{p}{3} = 0{,}264 \times 10^{-6}$$

$$\frac{p}{3} \ldots 9{,}4216 - 6 = 13{,}4216 - 20; \quad \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} = 0{,}0002090 = +\,0{,}2090 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{\frac{p}{3}} \ldots 6{,}7108 - 10 \qquad -\frac{a}{3} = \qquad -\,0{,}5000 \times 10^{-3}$$

$$\operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} \ldots 9{,}6094 \qquad h = \qquad -\,0{,}2910 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} \ldots 6{,}3202 - 10$$

Вычисляем теперь мнимую часть $k = \sqrt{p}\ \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3}$

$$\sqrt{\frac{p}{3}} \ldots 6{,}7108 - 10$$

$$\sqrt{3} \ldots 0{,}2385$$

$$\sqrt{p} \ldots 6{,}9493 - 10$$

$$\operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} \ldots 0{,}0333$$

$$k \ldots 6{,}9826 - 10$$

$$k = 0{,}0009607 = 0{,}9607 \times 10^{-3}$$

и наконец находим вещественный корень $r_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} - \frac{a}{3}$

$$\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} = +\,0{,}2090 \times 10^{-3}$$

$$-2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3} = -\,0{,}4180 \times 10^{-3}$$

$$-\frac{a}{3} = -\,0{,}5000 \times 10^{-3}$$

$$r_1 = -\,0{,}9180 \times 10^{-3}$$

Таким образом, в численной форме общий интеграл будет:

$$y = C_1 e^{-0{,}9180 \times 10^{-3} t} + e^{-0{,}2910 \times 10^{-3} t} [C_2 \cos (0{,}9607 \times 10^{-3} t) + C_3 \sin (0{,}9607 \times 10^{-3} t)].$$

Первый член дает затухающее апериодическое движение; так, через $16\frac{2}{3}$ минуты от начала движения величина этого члена окажется $C_1 \times 0{,}399$, т. е. составит 0,4 первоначального значения. Два других члена выражают обыкновенное гармоническое затухающее движение с периодом T

$$T = \frac{2\pi}{0{,}9607 \times 10^{-3}} \approx 6540 \text{ сек.} \approx 109{,}0 \text{ минуты.}$$

Логарифмический декремент затухания $\mu = \ln\left(\frac{Y_{k-1}}{Y_k}\right) = 0{,}2910 \times 10^{-3} \frac{T}{2}$ (см. гл. 5, § 9, п. 4), то есть $\mu = 0{,}9515$, а потому отношение двух последовательных амплитуд или так называемый фактор затухания $f = e^{\mu} = 2{,}59$, иначе сказать, каждая последующая амплитуда примерно равна 0,39 предшествующей.

2) Рассмотрим теперь уравнение с последним членом и тот частный случай, когда последний член величина постоянная

$$y''' + ay'' + by' + cy = K. \qquad (7)$$

По указанному выше правилу найдем общий интеграл уравнения без последнего члена

$$y = C_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} + B_3 e^{r_3 t}.$$

Будем искать частное решение уравнения (7) в таком именно виде, каков последний член, т. е. будем искать решение такое:

$$Y = A, \tag{8}$$

где A — некоторая постоянная, которую определим из условия, чтобы решение (8) удовлетворяло уравнению (7). Дифференцируя (8) и подставляя в (7), найдем для определения A уравнение

$$cA = K,$$

откуда

$$A = \frac{K}{c},$$

а потому общий интеграл уравнения (7) с последним членом будет

$$y + Y,$$

то есть

$$y = C_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} + B_3 e^{r_3 t} + \frac{K}{c}. \tag{9}$$

Глава 2

РЯДЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Основные понятия и определения 283
§ 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами 284
§ 3. Ряды Тейлора и Маклорена для одной переменной. Формула бинома 285
§ 4. Некоторые важнейшие биномиальные ряды 286
§ 5. Ряды для показательных и логарифмических функций 286
§ 6. Разложение тригонометрических функций в степенные ряды 287
§ 7. Действия над степенными рядами 288
§ 8. Формулы Тейлора и Маклорена в случае нескольких независимых переменных 288
§ 9. Ряд со средним значением аргумента 289
§ 10. Разложение функций в тригонометрические ряды 290
§ 11. Разложение в ряды функции $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ 292
§ 12. Разложение в ряд разности $y - x$, где $\operatorname{tg} y = p \operatorname{tg} x$ и $|p|$ близко к 1.. 293
§ 13. Разложение в ряд разности $y - x$ из выражений $\cos y = \cos x + \varepsilon$, $\sin y = \sin x + \varepsilon$, $\cos y = p \cos x$ и $\sin y = p \sin x$, где p — величина, близкая к 1, ε — величина малая 293
§ 14. Разложение $\ln k$ и A, определяемых уравнениями $k \sin A = m \sin C$, $k \cos A = 1 + m \cos C$ 294
§ 15. Некоторые ряды, вытекающие из разложений § 11 295
§ 16. Ряды Лагранжа и Лапласа 295

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Академик В. И. Смирнов. Курс высшей математики т. I, М., Л., 1940.
2. Академик А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 2-ое Академии наук, 1933.

§ 1. Основные понятия и определения

Определение. Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n\ \ldots \tag{1}$$

Составим сумму

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ u_n + \ldots \tag{2}$$

Если при беспредельном возрастании n величина s_n стремится к определенному конечному пределу s, т. е.

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

сходится и имеет сумму s, и пишут

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Если s_n не стремится к конечному пределу, то говорят, что ряд (3) расходящийся.

Основные свойства бесконечных рядов

1. Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

имеет сумму s, то ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + au_4 + \ldots + au_n + \ldots,$$

получаемый из предыдущего умножением всех членов его на одно и то же число a, имеет сумму as.

2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать, т. е. если

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = s$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sigma,$$

то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$$

тоже сходится и сумма его равна $s \pm \sigma$.

3. Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушится, если от начала ряда отбросить или приписать к нему любое конечное число членов.

4. Общий член u_n всякого сходящегося ряда стремится к нулю при беспредельном возрастании n.

Это свойство необходимо для сходимости ряда; однако, оно еще недостаточно для этого.

§ 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

1. **Признак Коши.** Если общий член ряда с положительными членами

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\dots u_n+\dots, \tag{4}$$

начиная с некоторого значения n, удовлетворяет неравенству

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1,$$

где q не зависит от n, то ряд (4) сходится.

Если, наоборот,

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

то ряд (4) расходится.

2. **Признак Даламбера.** Если отношение последующего члена ряда (4) к предыдущему

$$\frac{u_n}{u_{n-1}},$$

начиная с некоторого значения n, удовлетворяет неравенству

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q<1,$$

где q не зависит от n, то ряд (4) сходящийся.

Если, наоборот,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}\geqslant 1,$$

то ряд расходящийся.

Следствие. Если при беспредельном возрастании n

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ или } \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

стремится к конечному пределу r, то ряд (4) наверно сходится, если $r<1$, и расходится, если $r>1$.

3. **Интегральный признак Коши.** Если члены ряда (4) положительны, убывают при возрастании n и равны

$$u_1=f(1),\ u_2=f(2),\ \dots\ u_n=f(n)\ \dots,$$

то ряд (4) сходится или расходится, смотря по тому, имеет ли интеграл

$$J=\int_1^{\infty} u(x)\,dx$$

конечное значение или равен бесконечности.

Вместо 1 нижним пределом в интеграле J можно взять любое конечное число a.

1) Знакопеременные ряды.
Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \ldots$$

сходящийся, если абсолютные значения его членов убывают и стремятся к нулю по мере увеличения n (признак Лейбница). Остаток такого ряда по абсолютному значению не превосходит абсолютного значения первого отброшенного члена.

2) Абсолютно сходящиеся ряды.
Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

наверно сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, т. е. ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

Такие ряды называются абсолютно сходящимися рядами.

§ 3. Ряды Тейлора и Маклорена для одной переменной. Формула бинома

1. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора представляет разложение приращения функции в ряд, расположенный по возрастающим степеням приращения переменной независимой. Ряд имеет вид:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \ldots \quad (1)$$

или

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \ldots \quad (1)^*$$

Чтобы $f(x)$ в интервале (a, b) можно было представить в виде ряда Тейлора, необходимо, чтобы $f(x)$ и все последовательные производные до $(n+1)$ порядка включительно оставались конечными и непрерывными для всех значений в пределах от a до b.

Ряд Тейлора можно написать еще в таком виде:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = dy + \frac{1}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \ldots, \quad (2)$$

который показывает, что полное приращение функции не равно ее дифференциалу, а равно сумме бесконечно малых членов различных порядков, из которых член низшего порядка dy и есть дифференциал функции, а d^2y, d^3y ... — дифференциалы высших порядков.

Эта форма ряда Тейлора замечательна тем, что она годится не только для функции одной переменной, но и для функции скольких угодно переменных.

2. Ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \ldots \quad (3)$$

3. Формула бинома

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \quad (4)$$

$$|x| < 1.$$

§ 4. Некоторые важнейшие биномиальные ряды

1. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$
2. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
3. $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$
4. $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$
5. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots$
6. $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots$
7. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \dots$
8. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots$
9. $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$
10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$
11. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + \dots$
12. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 - \frac{91}{729}x^5 + \frac{728}{6561}x^6 - \dots$
13. $\sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q \cdot 2q}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{q \cdot 2q \cdot 3q}x^3 + \dots$
14. $\frac{1}{\sqrt[q]{(1+x)^p}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{q \cdot 2q}x^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{q \cdot 2q \cdot 3q}x^3 + \dots$

Все биномиальные ряды сходятся при $|x|<1$.

§ 5. Ряды для показательных и логарифмических функций

1. $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\dots$
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
3. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \quad a>0$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$
5. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$

   $|x|<1$
6. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right) \quad |x|<1$
7. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right) \quad |x|>1$

8. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right] \quad x > 0$

9. $\ln(a+x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \ldots\right.$
$a > 0$ и $x > -a$

10. $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad |x| \leqslant 1.$

Произведение n первых целых чисел 1, 2, 3, 4, ..., n обозначают $n!$ и называют факториалом.

§ 6. Разложение тригонометрических функций в степенные ряды

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots$

3. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2}{945}x^6 - \ldots\right)$

5. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots$

6. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + \ldots\right)$

7. $x = \arcsin y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} + \ldots =$
$= y + \frac{y^3}{6} + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \ldots \quad (y = \sin x); \quad |y| < 1$

8. $x = \operatorname{arc\,tg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots \quad (y = \operatorname{tg} x); \quad |y| < 1$

9. $x = \operatorname{arc\,tg} y = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3}\frac{1}{y^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{y^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{y^7} - \ldots \quad y > 1$

$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y; \quad \operatorname{arc\,ctg} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} y.$$

Ряды для логарифмов тригонометрических функций.

10. $\lg \sin x = \lg x'' \operatorname{arc} 1'' - \mu\frac{x^2 \operatorname{arc}^2 1''}{6} - \mu\frac{x^4 \operatorname{arc}^4 1''}{180} - \ldots$

11. $\lg \operatorname{tg} x = \lg x'' \operatorname{arc} 1'' + \mu\frac{x^2 \operatorname{arc}^2 1''}{3} + \frac{7}{90}\mu x^4 \operatorname{arc}^4 1''$

12. $\lg \cos x = -\mu\frac{x^2 \operatorname{arc}^2 1''}{4} - \mu\frac{x^4 \operatorname{arc}^4 1''}{12}$

$$\mu = 0{,}43429448\ldots$$

Логарифмы тригонометрических функций малых углов.

13. $\lg \sin x = \lg(x'' \operatorname{arc} 1'') - \sigma(x)$.

14. $\lg \operatorname{tg} x = \lg(x'' \operatorname{arc} 1'') + 2\sigma(x)$.

15. $\lg \cos x = -3\sigma(x)$.

16. $\sigma(x) = \frac{\mu(x'')^2 \operatorname{arc}^2 1''}{6}$; $\lg\left(\frac{\mu}{6}\operatorname{arc}^2 1''\right) = 8{,}23078 - 20$.

§ 7. Действия над степенными рядами

1. Обращение степенных рядов. Если дано выражение

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots, \tag{1}$$

то обращением этого ряда называется выражение x в функции y, то есть

$$x = b_1 (y - a_0) + b_2 (y - a_0)^2 + b_3 (y - a_0)^3 + b_4 (y - a_0)^4 + b_5 (y - a_0)^5 + \ldots \tag{2}$$

Здесь $b_1 = \frac{1}{a_1}$; $b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}$; $b_3 = \frac{-a_1 a_3 + 2a_2^2}{a_1^5}$; (2)*

$$b_4 = \frac{-a_1^2 a_4 + 5a_1 a_2 a_3 - 5a_2^3}{a_1^7}; \quad b_5 = \frac{-a_1^3 a_5 + 3a_1^2 (a_3^2 + 2a_2 a_4) - 21 a_1 a_2^2 a_3 + 14 a_2^4}{a_1^9}$$

Если $a_0 = 0$, то выражение (2) упрощается, но коэфициенты b_1, b_2, b_3, b_4 и т. д. значения своего не изменяют.

2. Умножение степенных рядов.

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} A_0 = a_0 b_0 & \\ A_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 & A_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ A_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + \ldots \text{ и т. д.} & \end{array}\right\} \tag{3}*$$

3. Деление степенных рядов.

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots} = \frac{a_0}{b_0} \frac{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots}{1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots} = \frac{a_0}{b_0} \{1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots\}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 = \alpha_1 - \beta_1 & B_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \beta_1 + \beta_1^2 - \beta_2 \\ B_3 = \alpha_3 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \beta_3 - \beta_1^3 + \alpha_1 \beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 & \end{array}\right\} \tag{4}*$$

4. Возвышение в степень степенного ряда. Если

$$y = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots,$$

то

$$y^n = 1 + X_1 x + X_2 x^2 + X_3 x^3 + X_4 x^4 + \ldots, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = na \qquad X_2 = n\left(\frac{n-1}{2} a^2 + b\right) \\ X_3 = n\left(\frac{(n-1)(n-2)}{6} a^3 + (n-1) ab + c\right) \\ X_4 = n\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} a^4 + \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a^2 b + \frac{n-1}{2} b^2 + (n-1) ac + d\right] \end{array}\right\} \tag{5}*$$

§ 8. Формулы Тейлора и Маклорена в случае нескольких независимых переменных

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left[h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right] + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \ldots \tag{6}$$

$$f(x,y)=f(0,0)+\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{00}+y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{00}\right]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{00}+2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{00}+y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{00}\right]+\cdots \qquad (7)$$

Для примера разложим высоту светила и его азимут в ряд по степеням малых приращений широты и долготы, ограничившись членами 1-го порядка. Высота $h=\arcsin(\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t)=f(\varphi,t)$. Обозначим через φ_c и t_c какие-нибудь приближенные значения, а $\Delta\varphi$ и Δt — поправки к этим приближенным значениям, так что точные значения φ и t будут:

$$\varphi=\varphi_c+\Delta\varphi; \qquad t=t_c+\Delta t.$$

Тогда можно написать:

$$h=f(\varphi_c+\Delta\varphi,\ t_c+\Delta t)=f(\varphi_c t_c)+\left(\frac{\partial h}{\partial\varphi}\right)_c\Delta\varphi+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_c\Delta t.$$

Но
$$\left(\frac{\partial h}{\partial\varphi}\right)_{\substack{t\\ \delta=\text{const}}}=-\cos A, \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\substack{\delta\\ \varphi=\text{const}}}=-\cos\varphi\sin A,$$

если считать азимут от S через W от 0° до 360°, как принято в астрономии (см. стр. 143—144, группа I, формула 1 и группа III, формула 1).

Введя еще вместо перемены часового угла Δt перемену долготы $\Delta\lambda$ и считая ее положительной к западу, увидим, что $\Delta t=-\Delta\lambda$. Так как $f(\varphi_c t_c)=h_c$, то

$$h=h_c-\Delta\varphi\cos A_c+\Delta\lambda\cos\varphi_c\sin A_c. \qquad (8)$$

Если же считать азимуты a от N через O, как принято в навигации и геодезии, равно как и долготу к O, то:

$$h=h_c+\Delta\varphi\cos a_c+\Delta\lambda\sin\varphi_c\sin a_c. \qquad (8)^*$$

Таким же образом, считая, что $A=F(t,\varphi)$, так как согласно формуле ctg-ов

$$\operatorname{ctg}A\cdot\sin t=\cos t\sin\varphi-\operatorname{tg}\delta\cdot\cos\varphi,$$

получим:

$$A=A_c+\left(\frac{\partial A}{\partial\varphi}\right)_c\Delta\varphi+\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_c\Delta t,$$

но

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varphi}\right)_{\substack{t\\ \delta=\text{const}}}=-\frac{\sin A}{\operatorname{ctg}h} \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\substack{\varphi\\ \delta=\text{const}}}=\sin\varphi+\frac{\cos\varphi\cos A}{\operatorname{ctg}h}$$

(см. стр. 143—144, группа I, формула 5 и группа III, формула 5). Поэтому

$$A=A_c-\Delta\varphi\frac{\sin A_c}{\operatorname{tg}z_c}-\Delta\lambda\left(\sin\varphi_c+\frac{\cos\varphi_c\cos A_c}{\operatorname{tg}z_c}\right). \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) имеют большое применение в астрономии.

§ 9. Ряд со средним значением аргумента

Если для вычисления производных f', f'' и т. д. взять не начальное значение аргумента x_0, не конечное x_0+h, а среднее $x_0+\frac{h}{2}$, то получим ряд со средним значением аргумента

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f'''\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\cdots$$

Отсюда видно, что в этом случае члены с h^2 пропали, т. е. ряд для среднего значения аргумента точнее, чем ряд с начальным значением в том смысле, что, ограничиваясь членами, положим, 1-го порядка, мы делаем ошибку не 2-го, а уже 3-го порядка. Это замечание справедливо и для ряда функций нескольких переменных.

§ 10. Разложение функций в тригонометрические ряды

Во многих вопросах прикладной математики приходится иметь дело с приближенным представлением функции при помощи ряда, расположенного по синусам и косинусам аргументов, возрастающих в арифметической прогрессии.

Пусть задана функция

$$V=f(\theta)$$

от аргумента θ в промежутке от $\theta=-\pi$ до $\theta=+\pi$ и эту функцию надо представить в виде следующего ряда:

$$\left.\begin{aligned} f(\theta)=A_0+C_1\cos\theta+C_2\cos 2\theta+C_3\cos 3\theta+\ldots+C_n\cos n\theta+\ldots \\ +B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+B_3\sin 3\theta+\ldots+B_n\sin n\theta+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Такого вида ряды называются тригонометрическими или рядами Фурье.

Прежде всего надо показать, как можно найти коэфициенты A_0, C_i и B_i.

1. Определение коэфициента A_0. Для определения коэфициента A_0 надо обе части равенства (1) умножить на $d\theta$ и интегрировать в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, тогда будет

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,d\theta. \quad (2)$$

2. Определение коэфициента C_n ($n=1, 2, 3, \ldots$). Для определения коэфициента C_n надо умножить обе части равенства (1) на $\cos n\theta d\theta$ и интегрировать в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, тогда будет

$$C_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta. \quad (3)$$

3. Определение коэфициента B_n ($n=1, 2, 3, \ldots, n$). Для определения коэфициента B_n надо умножить обе части равенства (1) на $\sin n\theta d\theta$ и интегрировать в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, тогда будет

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta. \quad (4)$$

Если функция $y=F(x)$ задана в промежутке от $-l$ до $+l$, то для ее разложения в ряд Фурье надо положить $\frac{\pi x}{l}=\theta$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} y=A_0+C_1\cos\frac{\pi x}{l}+C_2\cos\frac{2\pi x}{l}+C_3\cos\frac{3\pi x}{l}+\ldots+C_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\ldots \\ +B_1\sin\frac{\pi x}{l}+B_2\sin\frac{2\pi x}{l}+B_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(x)\,dx \\ C_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если $F(x)$ функция четная, то она может быть разложена в ряд по cos-ам такого вида:

$$F(x) = A_0 + C_1\cos\frac{\pi x}{l} + C_2\cos\frac{2\pi x}{l} + C_3\cos\frac{3\pi x}{l} + \ldots + C_n\cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots, \tag{7}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\,dx; \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{8}$$

Если функция $F(x)$ нечетная, то она может быть разложена в ряд по sin-ам такого вида:

$$F(x) = B_1\sin\frac{\pi x}{l} + B_2\sin\frac{2\pi x}{l} + B_3\sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots + B_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots, \tag{9}$$

где

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{10}$$

Функция $F(x)$ должна удовлетворять следующим условиям.

В пределах от $\theta = -\pi$ до $\theta = +\pi$, включая и эти значения аргумента:

а) она остается конечной,

б) имеет конечное число максимумов и минимумов,

в) вообще непрерывна и лишь при некоторых отдельных частных значениях $\theta = \theta_k$ переменной, число которых конечное, претерпевает разрывы, так что $\lim\limits_{h\to 0} f(\theta_k - h) \neq \lim\limits_{h\to 0} f(\theta_k + h)$, но оба эти предела конечные. Это так называемые условия Дирихле.

Тогда при разложении этой функции в тригонометрический ряд оказывается, что предел суммы первых n членов этого ряда, при возрастании числа n для всякого значения θ, при котором функция $f(\theta)$ непрерывна, есть $f(\theta)$; для тех значений $\theta = \theta_k$, где функция претерпевает разрыв непрерывности, сказанная сумма есть

$$\frac{1}{2}\left[\lim f(\theta_k - h) + \lim f(\theta_k + h)\right]_{h\to 0}$$

и, наконец, при $\theta = -\pi$ и при $\theta = +\pi$ сказанная сумма есть

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi) + f(+\pi)\right].$$

Если функции $f(\theta)$ или $F(x)$ заданы численно или графически, то для определения коэфициентов A_0, C_n и B_n надо пользоваться особыми правилами.

§ 11. Разложение в ряды функции $y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

Угол x называют „гудерманиан“ y-а и обозначают

$$x=\operatorname{gd} y,$$

поэтому иногда пишут, рассматривая y как обратную функцию от гудерманиана,

$$y=\operatorname{arg}\operatorname{gd} x\ ^{*}) \quad \text{или} \quad \operatorname{gd}^{-1} x$$

1. При $|x|<\frac{\pi}{2}$

$$y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{24}+\frac{61x^7}{5040}+\ldots \tag{1}$$

2. При x каком угодно и h малом

$$\Delta y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x+h}{2}\right)-\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{h}{\cos x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{(1+\sin^2 x)}{\cos^3 x}+\frac{h^4}{4!}\sin x\left(\frac{5+\sin^2 x}{\cos^4 x}\right)+\frac{h^5}{5!}\left(\frac{5+18\sin^2 x+\sin^4 x}{\cos^5 x}\right)+\ldots \tag{2}$$

3. Ряд для $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ по среднему аргументу $x_m=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$; $\frac{1}{2}(x_2-x_1)=\frac{1}{2}\xi$.

$$y_1-y_2=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_2}{2}\right)-\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_1}{2}\right)=\frac{\xi}{\cos x_m}+$$
$$+\frac{\xi^3}{24}\frac{(1+\sin^2 x_m)}{\cos^3 x_m}+\frac{\xi^5}{1920}\left(\frac{5+18\sin^2 x_m+\sin^4 x_m}{\cos^5 x_m}\right). \tag{3}$$

Если вместо натурального логарифма ln в правой части функции будет стоять знак обыкновенного логарифма lg, то правые части выражений (1)—(3) следует помножить на модуль обыкновенной системы логарифмов $\mu=0{,}43429\ldots$

Нередко вместо sin-ов и cos-ов вводят в этих формулах tg-ы, вынеся предварительно $\frac{1}{\cos x}$ за скобку. Например

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{1}{\cos x}(1+2\operatorname{tg}^2 x).$$

4. Если, наоборот, x надо выразить в виде ряда по степеням y, то получим:

при $|x|<\frac{\pi}{2}$

$$x=y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{24}y^5-\frac{61}{5040}y^7+\ldots \tag{4}$$

5. $$y=2\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{7}\sin 7x+\ldots\right) \tag{5}$$

Этот ряд сходится весьма медленно.

---

*) Символ $\operatorname{arg}\operatorname{gd} x$ читается так: „аргумент гудерманиана x-а“. См. главу 4 — Гиперболические функции.

§ 12. Разложение в ряд разности $y-x$, где $\operatorname{tg} y = p \operatorname{tg} x$ и $|p|$ близко к 1

Выражения указанного вида встречаются очень часто и если $|p|$ близко к 1, то x и y мало отличаются одно от другого. Для вычисления одной величины по заданной другой удобно разность $y-x$ разложить в ряд следующего вида.

Если $p>0$, то

$$y-x=q\sin 2x+\frac{1}{2}q^2\sin 4x+\frac{1}{3}q^3\sin 6x+\ldots, \qquad (1)$$

где

$$q=\frac{p-1}{p+1}.$$

Если $p<0$, то

$$y+x=\pi-\frac{\sin 2x}{q}-\frac{\sin 4x}{2q^2}-\frac{\sin 6x}{3q^3}-\ldots \qquad (2)$$

Если $y-x$ или $y+x$ надо представить в функции от y, то будет:

$$y-x=q\sin 2y-\frac{1}{2}q^2\sin 4y+\frac{1}{3}q^3\sin 6y-\ldots \qquad (3)$$

$$y+x=\pi+\frac{1}{q}\sin 2y-\frac{1}{2q^2}\sin 4y+\frac{1}{3q^3}\sin 6y-\ldots \qquad (4)$$

Пример. В элементарном прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A=90^\circ$ и $\angle C$ мал) имеем

$$\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a\cos C,$$

так как $\cos C$ величина близкая к 1, то разность $a-b$ по формуле (1) получается непосредственно приближенно

$$a-b=\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\sin 2a\approx\frac{\operatorname{arc}^2 C}{4}\sin 2a$$

или в секундах дуги

$$a-b=\frac{C^2}{4}\sin 2a\operatorname{arc}1''$$

(см. отд. I, гл. 4, § 9, формула 2).

§ 13. Разложение в ряд разности $y-x$ из выражений $\cos y=\cos x+\varepsilon$, $\sin y=\sin x+\varepsilon$, $\cos y=p\cos x$ и $\sin y=p\sin x$, где p — величина, близкая к 1, ε — величина малая

1. $\cos y=\cos x+\varepsilon$.

$$y-x=-\frac{\varepsilon}{\sin x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sin x}\right)^2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{\sin x}\right)^2(1+3\operatorname{ctg}^2 x) \qquad (1)$$

2. $\sin y=\sin x+\varepsilon$.

$$y-x=\frac{\varepsilon}{\cos x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\cos x}\right)^2\operatorname{tg} x+\frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{\cos x}\right)^3(1+3\operatorname{tg}^2 x)\ldots \qquad (2)$$

3. $\cos y=p\cos x$.

Положив $p=1-\varepsilon$, получим:

$$y-x=\varepsilon\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}\varepsilon^2\operatorname{ctg}^2 x+\ldots \qquad (3)$$

4. Совершенно так же, если $\sin y=p\sin x$, то

$$y-x=-\varepsilon\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\varepsilon^2\operatorname{tg}^2 x-\ldots \qquad (4)$$

§ 14. Разложение $\ln k$ и A, определяемых уравнениями

$$\left.\begin{aligned} k\sin A &= m\sin C \\ k\cos A &= 1+m\cos C \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или равносильными им формулами

$$\left.\begin{aligned} k &= (1+2m\cos C+m^2)^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{tg} A &= \frac{m\sin C}{1+m\cos C} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а) Если $(m<1)$

$$\left.\begin{aligned} \ln k &= m\cos C-\frac{m^2}{2}\cos 2C+\frac{m^3}{3}\cos 3C-\dots \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m\sin C}{1+m\cos C}\right) &= A = m\sin C-\frac{m^2}{2}\sin 2C+\frac{m^3}{3}\sin 3C+\dots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если под знаком $\lg k$ понимать обыкновенный (десятичный) логарифм, то правую часть первого выражения (3) надо умножить на $\mu = 0{,}43429\dots$

Разложение выражений

$$\left.\begin{aligned} k\sin A &= m\sin C \\ k\cos A &= 1-m\cos C \end{aligned}\right\} \tag{1}^*$$

или равносильных им

$$\left.\begin{aligned} k &= (1-2m\cos C+m^2)^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{tg} A &= \frac{m\sin C}{1-m\cos C} \end{aligned}\right\} \tag{2}^*$$

$$\left.\begin{aligned} \ln k &= -m\cos C-\frac{m^2}{2}\cos 2C-\frac{m^3}{3}\cos 3C-\dots \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m\sin C}{1-m\cos C}\right) &= A = m\sin C+\frac{m^2}{2}\sin 2C+\frac{m^3}{3}\sin 3C+\dots \end{aligned}\right\} \tag{3}^*$$

б) Если $(m>1)$ и $\operatorname{tg} A = \frac{m\sin C}{1\pm m\cos C}$, то

$$A = \pm C-\frac{1}{m}\sin C\pm\frac{1}{2m^2}\sin 2C-\frac{1}{3m^3}\sin 3C\pm\dots \tag{4}$$

в) Разложение в ряд радикала $\frac{1}{k}=J$

$$\frac{1}{k}=J=(1\mp 2m\cos C+m^2)^{-\frac{1}{2}}$$

делается таким образом:

$$J=(1\mp 2m\cos C+m^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}b_0\pm b_1\cos C+b_2\cos 2C\pm b_3\cos 3C+\dots, \tag{5}$$

где коэфициенты $\frac{1}{2}b_0$, b_1, b_2, ... суть функции величины m следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}b_0 &= \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^6+\dots\right. \\ b_1 &= 2\left[\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)m^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)m^5+\dots\right. \\ b_2 &= 2\left[\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)m^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)m^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)m^6+\dots\right. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вычисление следующих коэфициентов b_3, b_4, ... может быть выполнено по общей формуле:

$$b_{i+1} = \frac{m^2+1}{m}\frac{2i}{2i+1}b_i - \frac{2i-1}{2i+1}b_{i-1}. \qquad (7)$$

Полагая, например, $i=2$, найдем

$$b_3 = \frac{m^2+1}{m}\frac{4}{5}b_2 - \frac{3}{5}b_1 \qquad (7)^*$$

и т. д.

г) Разложение нечетных степеней радикала J, например $\frac{1}{k^3} = J^3$, имеет аналогичный вид:

$$\frac{1}{k^3} = J^3 = (1 \mp 2m\cos C + m^2)^{-\frac{3}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}d_0 \pm d_1\cos C + d_2\cos 2C \pm d_3\cos 3C + \ldots, \qquad (8)$$

где коэфициенты $\frac{1}{2}d_0$, d_1, d_2, ... суть функции величины m следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}d_0 &= \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 m^2 + \left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)^2 m^4 + \left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^6 + \left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 m^8 + \ldots\right.\\
d_1 &= 2\left[\frac{3}{2}m + \frac{3}{2}\left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)m^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)m^5 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)m^7 + \ldots\right.\\
d_2 &= 2\left[\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}m^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)m^4 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)m^6 + \ldots\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

§ 15. Некоторые ряды, вытекающие из разложений § 14

Приведем еще некоторые ряды, сходящиеся при любых значениях x.

1. $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x + \ldots = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$
2. $\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x + \ldots = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$
3. $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x \ldots = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$
4. $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots = \frac{x}{2}$
5. $\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots = \frac{1}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$
6. $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots = \frac{\pi}{4}$
7. $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots = \frac{\pi}{4}$
8. $\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

§ 16. Ряды Лагранжа и Лапласа

Если z есть функция от x, определяемая уравнением

$$z = x + \alpha f(z),$$

где α — параметр, а выражение $f(z)$ явно буквы x не заключает, то

переменную величину z можно разложить в ряд по формуле Лагранжа в функции переменной x по степеням параметра α.

Ряд этот имеет следующий вид:

$$z = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dx} [f(x)]^2 + \\ + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{dx^2} [f(x)]^3 + \ldots + \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [f(x)]^n + \ldots \qquad (1)$$

Таким образом, если какую-нибудь величину удается представить в виде (1), то разложение ее в ряд сведется только к операциям диференцирования.

Если надо разложить в ряд какую-нибудь функцию $F(z)$ от той же переменной z, то для этой цели служит ряд Лапласа, имеющий вид:

$$F(z) = F(x) + \alpha f(x) F'(x) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dx} \{[f(x)]^2 F'(x)\} + \\ + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{dx^2} \{[f(x)]^3 F'(x)\} + \ldots + \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{[f(x)]^n F'(x)\} + \ldots \qquad (2)$$

Остаточных членов этих рядов мы приводить не будем.

Пример. Разложить в ряд корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0,$$

если коэфициент a величина малая по сравнению с другими коэфициентами b и c.

$$z = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b} z^2.$$

Полагая здесь

$$x = -\frac{c}{b}; \quad \alpha = -\frac{a}{b}; \quad f(z) = z^2,$$

следовательно, $[f(z)]^2 = z^4$ и т. д., имеем сразу по формуле (1)

$$z = -\frac{c}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{b}\right)^2 4\left(-\frac{c}{b}\right)^3 + \ldots$$

или

$$z = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \ldots,$$

т. е. то самое выражение, которое приведено в главе 1, § 13, стр. 31.

Глава 3

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
и
НАЧАЛА ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
§ 1. Основные определения	299
§ 2. Сложение, вычитание и разложение векторов	301
§ 3. Произведения векторов	303
§ 4. Диференцирование вектора по скаляру	306
§ 5. Интегрирование вектора по скаляру	310
§ 6. Преобразование проекций вектора	310

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 1938.

§ 1. Основные определения

1. Вектором называется величина, вполне определяющаяся своим численным значением и направлением в пространстве*), подчиняющаяся правилу геометрического сложения.

Вектор геометрически определяется:

1) линией действия (l) (рис. 192);

2) длиной отрезка AB, изображающего вектор;

3) стороной или направлением действия (обозначаемых стрелкой).

Вектор аналитически определяется тремя числами:

1) двумя независимыми друг от друга косинусами углов, составляемых направлением l с осями координат, так как

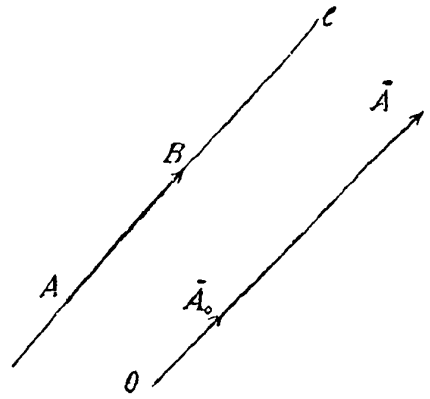


Рис. 192. Рис. 193.

$$\cos^2(l,x)+\cos^2(l,y)+\cos^2(l,z)=1;$$

2) численным значением вектора.

2. Модулем вектора называется абсолютная величина численного значения вектора. Модуль вектора соответствует длине отрезка AB.

3. Вектор свободный — начало вектора может быть взято в любой точке пространства (например, скорость поступательного движения твердого тела).

4. Вектор скользящий (передвижной) — начало может быть передвинуто вдоль линии действия вектора (например, сила, приложенная к твердому телу).

5. Вектор неподвижный (определенный) — начало скреплено с определенной точкой пространства (например, скорость движущейся частицы жидкости при установившемся течении).

Вектор обозначается в рукописи буквой с чертой над ней или под ней, например $\overline{a}$, $\underline{a}$ или $\overline{A}$, в печатном тексте — жирным шрифтом.

6. Равенство векторов. Два вектора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ считаются равными, если они: 1) параллельны, 2) направлены в одну сторону и 3) имеют равные модули.

*) Скаляром называется величина, вполне определяющаяся одним числом при заданной системе единиц.

В этом случае $A = B$.

Если векторы направлены в разные стороны, то $A = -B$.

Примечание. Равенство двух векторов сводится к равенству попарно трех чисел, эти векторы определяющих. Таким образом, одно векторное равенство равносильно трем скалярным.

7. Если $A \parallel B$, то векторы называются коллинеарными.

Коллинеарные векторы A и B связаны равенством $A = mB$, где m — скалярный множитель.

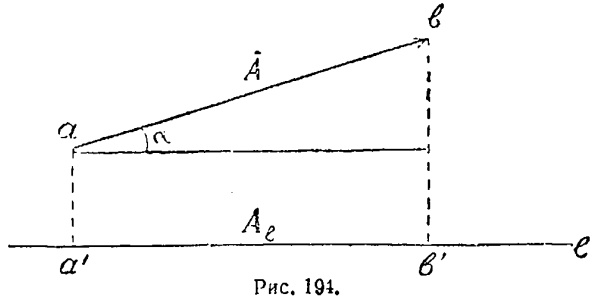


Рис. 194.

8. Если векторы параллельны одной и той же плоскости, то они называются компланарными.

9. Единичный вектор или орт данного вектора — вектор A° совпадающий с направлением вектора A и имеющий модуль, равный единице (рис. 193). Тогда

$$A = |A| A^\circ. \qquad (1)$$

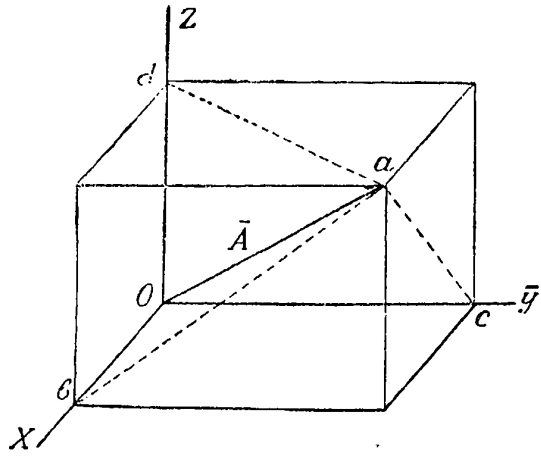


Рис. 195.

10. Проекция A_l вектора A на ось l (рис. 194).

$$A_l = a'b' = ab \cdot \cos\alpha = A\cos\alpha = A\cos(\widehat{A, l}) \qquad (2)$$

есть скалярная величина.

11. Проекции вектора A на оси декартовых координат (рис. 195):

$$\left.\begin{aligned} A_x &= Ob = Oa\cos(\widehat{A, X}) = A\cos(\widehat{A, X}) \\ A_y &= Oc = Oa\cos(\widehat{A, Y}) = A\cos(\widehat{A, Y}) \\ A_z &= Od = Oa\cos(\widehat{A, Z}) = A\cos(\widehat{A, Z}) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

12. Модуль вектора A:

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}. \tag{4}$$

13. Направляющие косинусы:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\widehat{A,x})&=\frac{A_x}{A}=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\\ \cos(\widehat{A,Y})&=\frac{A_y}{A}=\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\\ \cos(\widehat{A,Z})&=\frac{A_z}{A}=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

14. Составляющие вектора по осям:

$$\left.\begin{aligned}A_x&=A\cos(\widehat{A,x})\,x^\circ\\ A_y&=A\cos(\widehat{A,y})\,y^\circ\\ A_z&=A\cos(\widehat{A,z})\,z^\circ\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где x°, y°, z° — орты координатных осей.

Орты координатных осей обозначают часто и через i, j, k.

§ 2. Сложение, вычитание и разложение векторов

1. Геометрическая сумма C двух векторов A и B выражается диагональю параллелограмма, сторонами которого служат векторы A и B (рис. 196):

$$\left.\begin{aligned}C&=A+B\\ C^2&=A^2+B^2-2AB\cos(\widehat{A,B})\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. Свойство коммутативности (переместительности).

$$A+B=B+A. \tag{2}$$

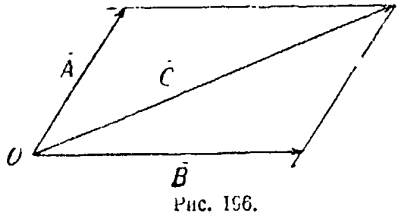


Рис. 196.

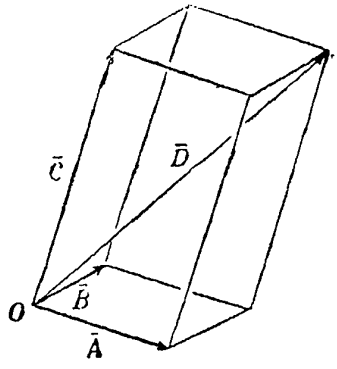


Рис. 197.

3. Геометрическая сумма D трех векторов A, B, C (рис. 197), не лежащих в одной плоскости, выражается диагональю параллелепипеда, сторонами которого служат векторы A, B, C.

$$D=A+B+C=A+C+B=B+C+A. \tag{2}^*$$

4. Геометрическая сумма S нескольких векторов выражается замыкающей стороной ломаной линии, составленной из слагаемых векторов.

$A, B, C, \ldots, N$, причем направление замыкающей берется против общего направления ломаной линии (векторный многоугольник (рис. 198).

$$S=A+B+C+\ldots+L+N=N+L+\ldots+C+B+A. \quad (3)$$

5. Свойство ассоциативности (сочетательности):

$$\left.\begin{aligned} &A+B+C+D+E+\ldots+M+N= \\ &=(A+B)+C+D+E+\ldots+(M+N)= \\ &=(A+B+C)+(D+E+\ldots+M)+N \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

6. Разностью двух векторов A и B называется вектор D, получающийся от сложения вектора A с вектором $-B$, противоположным B (рис. 199).

$$D=A-B=A+(-B). \quad (5)$$

Поэтому сумма векторов есть диагональ ON, а разность векторов есть другая диагональ ML. Направлен вектор D от конца вектора B к концу вектора A.

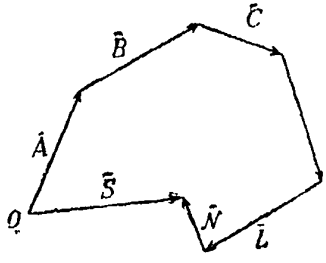


Рис. 198.

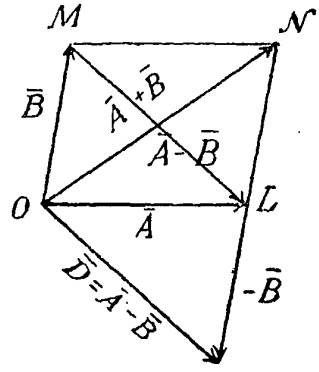


Рис. 199.

7. Умножение вектора A на скаляр m дает новый вектор

$$B=mA=mAA^{\circ}, \quad (6)$$

где вектор B параллелен вектору A, направлен в ту же или противоположную сторону в зависимости от знака скаляра m и имеет длину $|m|A$.

8. Свойство дистрибутивности (свойство раскрытия скобок):

$$\left.\begin{aligned} m(A+B+C+\ldots+N)&=mA+mB+mC+\ldots+mN, \\ mA+mB&=m(A+B). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

9. а) Если векторы A и B не коллинеарны, то вектор

$$C=mA+nB \quad (8)$$

параллелен плоскости, определяемой векторами A и B.

б) Всякий вектор C, компланарный двум неколлинеарным векторам A и B, может быть представлен в форме $C=mA+nB$, т. е. разложен на две составляющие, параллельные соответственно векторам A и B (рис. 200).

10. Если три вектора A, B, C не компланарны, то всякий вектор D может быть представлен в форме

$$D = mA + nB + pC, \tag{9}$$

т. е. разложен на три составляющие, параллельные соответственно векторам A, B, C.

11. Разложение вектора A по ортам i, j, k декартовых координатных осей OX, OY, OZ (рис. 201).

$$A = A_x i + A_y j + A_z k. \tag{10}$$

A_x, A_y, A_z называют прямоугольными координатами, проекциями или компонентами вектора A.

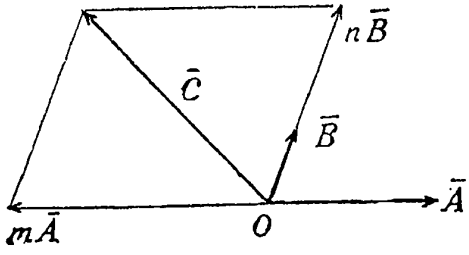


Рис. 200.

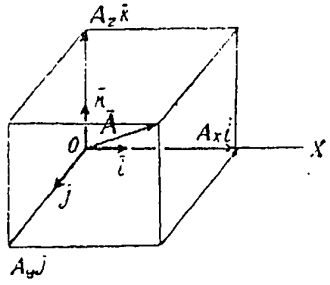


Рис. 201.

12. Проекция S_l суммы S векторов $A, B, C, \ldots, N$ на какую-либо ось l равна алгебраической сумме проекций $A_l, B_l, \ldots$ этих векторов на ту же ось.

$$S_l = A_l + B_l + C_l + \ldots + N_l. \tag{11}$$

§ 3. Произведения векторов

1. Скалярным (внутренним) произведением двух векторов A и B называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается *):

По определению $A \cdot B.$ (1)

или
$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= |A|\,|B| \cos(\widehat{A,B}) = AB\cos(\widehat{A,B}) \\ A \cdot B &= AB_A = BA_B = AB\cos(\widehat{A,B}) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Свойства скалярного произведения.

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A \cdot B = B \cdot A \text{ (коммутативность)} \\ &2)\ (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \text{ (дистрибутивность)} \\ &3)\ mA \cdot nB = mn\,A \cdot B. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Случаи скалярного умножения:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{Если } A \downarrow\downarrow B, \text{ то } AB = AB \\ &2)\ \text{„ } A \downarrow\uparrow B, \text{ то } AB = -AB \\ &3)\ \text{„ } A = 0 \text{ или } B = 0, \text{ то } A \cdot B = 0 \\ &4)\ \text{„ } A \perp B, \text{ то } A \cdot B = 0 \\ &5)\ \text{„ } A = B, \text{ то } A \cdot B = A^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

*) Также (AB) и AB.

Для единичных векторов i, j, k:

$$\left.\begin{aligned} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ j \cdot k = k \cdot i = i \cdot j = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выражение скалярного произведения двух векторов A и B через их проекции на оси прямоугольных координат:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \tag{6}$$

$$\cos(A, B) = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}. \tag{7}$$

Проекция вектора A на ось l есть скалярное произведение вектора A на единичный вектор l°, т. е.

$$A_l = A \cos(\widehat{A, l}) = A \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{A, l}) = A \cdot l^\circ. \tag{8}$$

2. Векторным (внешним) произведением двух векторов A и B называется вектор C, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах A и B (проведенных из одной точки), перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы вращение от A к B по кратчайшему пути вокруг вектора C происходило в ту же сторону, как и вращение от оси X к оси Y вокруг оси Z (рис. 202).

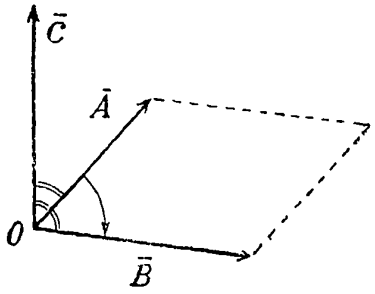


Рис. 202.

Векторное произведение обозначается:

$$C = A \times B^*). \tag{9}$$

По определению $|C| = |A \times B| = |A|\,|B| \sin(\widehat{A, B}) =$

$$= AB \sin = (\widehat{A, B}). \tag{10}$$

Свойства векторного произведения:

1) $A \times B = -(B \times A)$, т. е. от перестановки сомножителей векторное произведение меняет знак. Векторное произведение не коммутативно.

$$\left.\begin{aligned} &2)\ (A + B) \times C = A \times C + B \times C \text{ (дистрибутивность)} \\ &3)\qquad mA \times B = m(A \times B) \\ &\qquad\quad mA \times nB = mn(A \times B) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Случаи векторного умножения:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{Если } A \parallel B, \text{ то } A \times B = 0 \\ &2)\ \text{„ } A = 0 \text{ или } B = 0, \text{ то } A \times B = 0 \\ &3)\ \text{„ } A = B, \text{ то } A \times B = A \times A = 0 \\ &4)\ \text{„ } A \perp B, \text{ то } A \times B = AB \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для единичных векторов i, j, k:

$$\left.\begin{aligned} i \times i = j \times j = k \times k = 0 \\ k \times j = -i,\ i \times k = -j,\ j \times i = -k \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*) Также $[\bar{A}\ \bar{B}]$.

Выражение векторного произведения двух векторов A и B через их проекции на оси прямоугольных координат:

$$C=A\times B=\begin{vmatrix} i, & j, & k \\ A_x, & A_y, & A_z \\ B_x, & B_y, & B_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_y, A_z \\ B_y, B_z \end{vmatrix} i+\begin{vmatrix} A_z, A_x \\ B_z, B_x \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} A_x, A_y \\ B_x, B_y \end{vmatrix} k \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} C_x&=(A\times B)_x=A_yB_z-A_zB_y, \\ C_y&=(A\times B)_y=A_zB_x-A_xB_z, \\ C_z&=(A\times B)_z=A_xB_y-A_yB_z. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

3. Скалярно-векторное (смешанное) произведение, обозначаемое

$$A\cdot(B\times C), \qquad (16)$$

есть скаляр, геометрически выражающий объем параллелепипеда, построенного на векторах A, B, C (рис. 203).

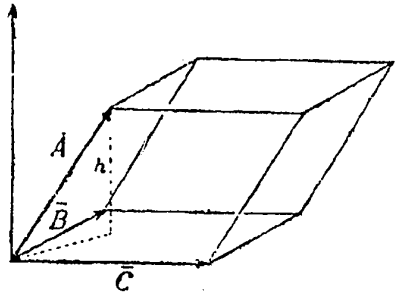


Рис. 203.

Свойства скалярно-векторного произведения:

1) Перестановка двух множителей.

$$A\cdot(B\times C)=-A\cdot(C\times B). \qquad (17)$$

2) Циклическая перестановка множителей.

$$A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B). \qquad (18)$$

Случаи скалярно-векторного умножения:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{Если } A, B, C \text{ компланарны, то } A\cdot(B\times C)=0 \\ &2)\ \text{Если } A=B \text{ или } A=C, \text{ или } B=C, \text{ то } A\cdot(B\times C)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Выражение скалярно-векторного произведения через проекции перемножаемых векторов на оси прямоугольных координат:

$$A\cdot(B\times C)=\begin{vmatrix} A_x, & A_y, & A_z \\ B_x, & B_y, & B_z \\ C_x, & C_y, & C_z \end{vmatrix}=$$

$$=A_xB_yC_z-A_xB_zC_y+A_yB_zC_x-A_yB_xC_z+A_zB_xC_y-A_zB_yC_x. \qquad (20)$$

4. Двойное векторное произведение, обозначаемое

$$D=A\times(B\times C), \qquad (21)$$

выражает собою вектор, компланарный с B и C и перпендикулярный к A.

Разложение двойного векторного произведения.

$$A\times(B\times C)=B(A\cdot C)-C(A\cdot B). \qquad (22)$$

5. Момент вектора. Момент вектора A относительно точки O (рис. 204):

$$\operatorname{mom}_O A = r \times A = \begin{vmatrix} i, & j, & k \\ r_x, & r_y, & r_z \\ A_x, & A_y, & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i, & j, & k \\ x, & y, & z \\ A_x, & A_y, & A_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

*)

Проекции момента вектора A относительно точки на оси координат или, что то же, моменты вектора A относительно координатных осей:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{mom}_x A &= \begin{vmatrix} y, & z \\ A_y, & A_z \end{vmatrix} = yA_z - zA_y \\ \operatorname{mom}_y A &= \begin{vmatrix} z, & x \\ A_z, & A_x \end{vmatrix} = zA_x - xA_z \\ \operatorname{mom}_z A &= \begin{vmatrix} x, & y \\ A_x, & A_y \end{vmatrix} = xA_y - yA_x \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

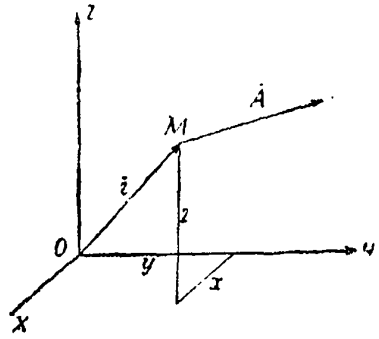


Рис. 204.

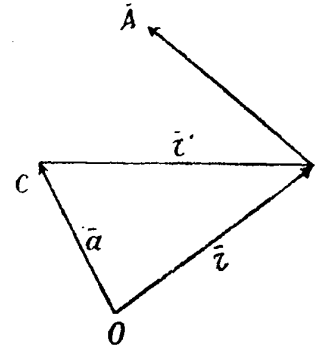


Рис. 205.

Момент вектора A относительно нового начала C (рис. 205).

$$\operatorname{mom}_C A = \operatorname{mom}_O A - (a \times A) = r \times A - a \times A.$$

§ 4. Диференцирование вектора по скаляру

1. Зависимость вектора от скаляра обозначается:

$$A(t),\ A(s),\ A(u),\ r(t),\ A(t, u) \text{ и т. п.},$$

где t, s, u — скалярные аргументы.

2. Годограф вектора — плоская или пространственная кривая l, описываемая концом переменного вектора, например $A = A(t)$, если за начало вектора A принять произвольную точку O (полюс) (рис. 206).

3. Производная вектора A по скалярному аргументу t есть вектор (рис. 207).

$$\frac{dA}{dt} = \lim \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}. \quad (1)$$

4. Производная вектора направлена по касательной к годографу диференцируемого вектора. Если

$$A = \text{const}, \quad \frac{dA}{dt} = 0. \quad (2)$$

*) Если точка O совпадает с началом координат.

5. Свойства производной вектора по скалярному аргументу:

$$1)\ \frac{d}{dt}(A+B)=\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}$$

производная суммы равна сумме производных.

$$2)\ \frac{dnA}{dt}=n\frac{dA}{dt}+A\frac{dn}{dt},$$

если n есть функция времени.

$$3)\ \frac{d}{dt}(mA)=m\frac{dA}{dt},$$

если m постоянна.

$$4)\ \frac{d}{dt}(A\cdot B)=A\cdot\frac{dB}{dt}+B\cdot\frac{dA}{dt}$$

формула дифференцирования скалярного произведения векторов.

$$5)\ \frac{d}{dt}(A\times B)=A\times\frac{dB}{dt}+\frac{dA}{dt}\times B$$

формула дифференцирования векторного произведения векторов.

$$6)\ \frac{d}{dt}[C\cdot A(t)]=C\cdot\frac{dA}{dt},\ \text{где}\ C=\text{const}.$$

$$7)\ \left(\frac{dA}{ds}\right)=\frac{dA}{dt}\frac{dt}{ds},\ \text{если}\ t=f(s)$$

формула дифференцирования вектора как сложной функции скалярных аргументов. (3)

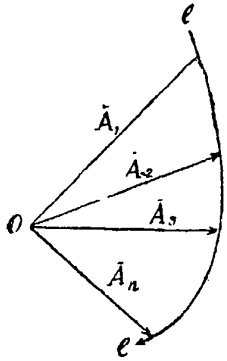


Рис. 206.

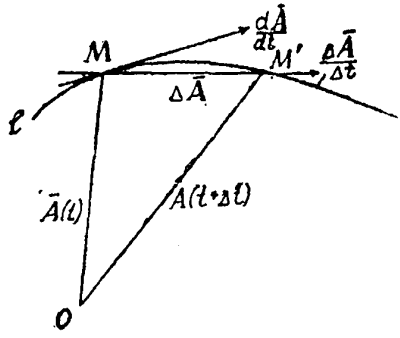


Рис. 207.

Аналогично для дифференциалов векторов будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} d(A+B+C)&=dA+dB+dC\\ d(A\cdot B)&=A\cdot dB+B\cdot dA\\ d(A\cdot B)&=dA\cdot B+A\cdot dB)\ \text{и т. д.}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

6. Производная $\frac{dA^\circ}{dt}$ единичного вектора A° (как и дифференциал dA°) перпендикулярна к A° и равна угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения единичного вектора вокруг начала O (рис. 208).

7.
$$\left.\begin{aligned} |dA^\circ|&=|A^\circ|\,d\varphi=d\varphi\\ \left|\frac{dA^\circ}{dt}\right|&=\frac{d\varphi}{dt}=\omega\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

8. Разложение производной по ортам координатных осей:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} j + \frac{dA_z}{dt} k, \tag{6}$$

то есть компоненты производной вектора A равны производным от компонентов данного вектора.

9. Проекции производной на неподвижные координатные оси:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_x = \frac{dA_x}{dt}; \quad \left(\frac{dA}{dt}\right)_y = \frac{dA_y}{dt}; \quad \left(\frac{dA}{dt}\right)_z = \frac{dA_z}{dt} \tag{7}$$

Проекция производной на любую ось l.

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_l = \frac{dA_l}{dt}. \tag{8}$$

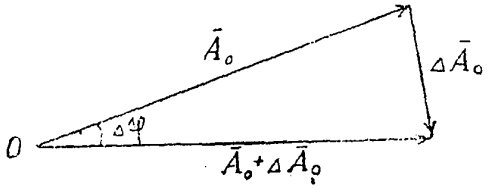


Рис. 208.

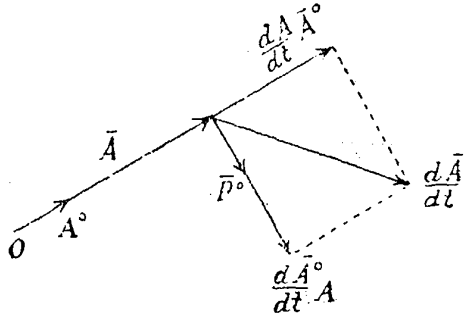


Рис. 209.

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{dA}{dt}\right| &= \sqrt{\left(\frac{dA_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dt}\right)^2} \\ \cos\left(\frac{dA}{dt}, X\right) &= \frac{\frac{dA_x}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dA_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dt}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и т. д.

10. Разложение производной вектора на продольную и поперечную составляющие (рис. 209):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt} A^\circ + \frac{dA}{dt} A^\circ = \frac{dA}{dt} A^\circ + A \frac{dA^\circ}{dt} P^\circ. \tag{10}$$

11. Производная радиуса-вектора $r = r(s)$ по дуге s (рис. 210):

$$\frac{dr}{ds} = \tau^\circ, \tag{11}$$

где τ° — орт касательной в точке M.

12. Производная орта τ° по дуге s:

$$\frac{d\tau^\circ}{ds} = kn^\circ, \tag{12}$$

где k — кривизна кривой в точке M.

n° — орт главной нормали в той же точке, отложенный в сторону вогнутости кривой.

Тогда:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\tau^\circ}{ds} = kn^\circ = \frac{1}{R} n^\circ \tag{13}$$

где $R = \frac{1}{k}$ — радиус кривизны в точке M.

13. Градиент. Если функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ однозначна и непрерывна, то вектор

$$G = \frac{d\varphi}{dn} n^{\circ}, \tag{14}$$

отложенный по нормали n к поверхности уровня в точке M, называется градиентом скалярной функции φ (рис. 211), т. е.

$$G = \frac{d\varphi}{dn} n^{\circ} = \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi. \tag{15}$$

Примечание. Символ ∇ (набла) называется оператором Гамильтона.

Разложение градиента по ортам координатных осей:

$$\frac{d\varphi}{dn} n = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k. \tag{16}$$

Производная функции φ по любому направлению s равна проекции градиента φ на это направление, то есть

$$\frac{d\varphi}{ds} = G_s.$$

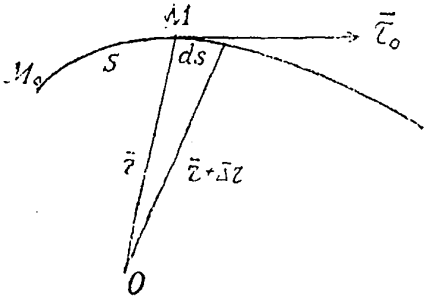


Рис. 210.

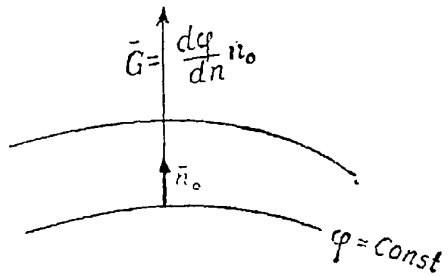


Рис. 211.

Если $s \perp n$, то $\frac{d\varphi}{ds} = 0$.

Квадрат длины вектора градиента.

$$(\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2. \tag{17}$$

Пример. φ — потенциал заряда e, то есть

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Поверхности уровня — поверхности шаров с центром в точке, содержащей заряд e. Нормаль n совпадает с радиусами r шаров и направлена к центру, следовательно:

$$\nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dn} n^{\circ} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{\circ} = -\frac{e}{r^2} r^{\circ},$$

где r° — орт, идущий по r.

Эту задачу можно решить иначе.

В проекциях градиент равен:

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j+\frac{\partial\varphi}{\partial z}k=-\left(\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}k\right)$$

или, так как

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}\frac{z}{r},$$

$$\nabla\varphi=-\left(\frac{e}{r^2}\frac{x}{r}i+\frac{e}{r^2}\frac{y}{r}j+\frac{e}{r^2}\frac{z}{r}k\right)=$$

$$=-\frac{e}{r^3}(xi+yj+zk)=-\frac{e}{r^3}r=-\frac{e}{r^3}rr^\circ=-\frac{e}{r^2}r^\circ.$$

14. Теоремы о градиентах.

Если даны две скалярных функции φ и ψ, то

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{grad}(\varphi\pm\psi)=\operatorname{grad}\varphi\pm\operatorname{grad}\psi\\ \operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi\\ \operatorname{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\operatorname{grad}(\varphi)\end{array}\right\}\qquad(18)$$

Первая формула показывает, что градиент алгебраической суммы или разности двух функций равен геометрической сумме или разности градиентов этих функций.

§ 5. Интегрирование вектора по скаляру

Если

$$\frac{dA(t)}{dt}=B(t),$$

то $A(t)$ — есть неопределенный интеграл от вектора B по скаляру t, то есть

$$A(t)=\int B(t)\,dt+C,\qquad(1)$$

где $C=\text{const}$.

Определенный интеграл

$$\int_{t_0}^{t}Bdt=A(t)-A(t_0)$$

или

$$\int_{t_0}^{t}Bdt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}B(t_i)(t_{i+1}-t_i),\qquad(2)$$

где t_i — ряд значений аргумента t, вставленных между t_0 и $t=t_{n+1}$, притом таким образом, что при стремлении n к бесконечности, все разности $t_{i+1}-t_i$ стремятся к нулю.

§ 6. Преобразование проекций вектора

1. Зная компоненты вектора A по осям X, Y и Z, можно вычислить его компонент по любому направлению U.

Возьмем для этого проекции на направление U обеих частей равенства (10) § 2.

$$A_u=A_x\cos(\widehat{U,X})+A_y\cos(\widehat{U,Y})+A_z\cos(\widehat{U,Z}).\qquad(1)$$

Таким образом, компонент A_u вектора A по любому направлению может быть выражен через компоненты по осям прямоугольной системы, причем, как видно из формулы (1), линейным образом.

Подставляя вместо A_u его величину $A\cos(AU)$, а вместо компонентов A_x, A_y, A_z их значения по (3) § 1, и сокращая на A, получим:

$$\cos(AU)=\cos\varphi=\cos(\widehat{A,X})\cos(\widehat{U,X})+\cos(\widehat{A,Y})\cos(\widehat{U,Y})+$$
$$+\cos(\widehat{A,Z})\cos(\widehat{U,Z}), \qquad (2)$$

известную из аналитической геометрии формулу, дающую косинус угла φ между двумя направлениями (см. гл. V, формулу 25).

2. Известны компоненты вектора A в некоторой прямоугольной системе $OX_1Y_1Z_1$, которые обозначим через A_{x_1}, A_{y_1} и A_{z_1}; спрашивается, как выражаются новые компоненты A_{x_2}, A_{y_2} и A_{z_2} в новой прямоугольной системе координат $OX_2Y_2Z_2$? Обозначим косинусы углов новых осей со старыми, как показано в таблице:

	X_1	Y_1	Z_1
X_2	α_1	α_2	α_3
Y_2	β_1	β_2	β_3
Z_2	γ_1	γ_2	γ_3

(3)

Тогда проекции вектора A на новые оси выразятся так:

$$\left.\begin{aligned} A_{x_2}&=A_{x_1}\alpha_1+A_{y_1}\alpha_2+A_{z_1}\alpha_3\\ A_{y_2}&=A_{x_1}\beta_1+A_{y_1}\beta_2+A_{z_1}\beta_3\\ A_{z_2}&=A_{x_1}\gamma_1+A_{y_1}\gamma_2+A_{z_1}\gamma_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Обратно проекции вектора A на старые оси через компоненты по новым осям выразятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_{x_1}&=A_{x_2}\alpha_1+A_{y_2}\beta_1+A_{z_2}\gamma_1\\ A_{y_1}&=A_{x_2}\alpha_2+A_{y_2}\beta_2+A_{z_2}\gamma_2\\ A_{z_1}&=A_{x_2}\alpha_3+A_{y_2}\beta_3+A_{z_2}\gamma_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Зависимость между девятью косинусами, приведенными в таблице (3), указана в главе 5, § 17, форм. (7), (8), (7)*, (8)*, (11)—(13).

Глава 4

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Аналитическое определение гиперболических функций 315
§ 2. Пределы изменения гиперболических функций 316
§ 3. Соотношения между гиперболическими функциями одного и того же аргумента 317
§ 4. Формулы гиперболических функций суммы и разности аргументов. 317
§ 5. Формулы гиперболических функций двойного и половинного аргументов 318
§ 6. Формулы суммы и разности гиперболических функций 318
§ 7. Выражение всех гиперболических функций рационально через $\operatorname{th}\frac{u}{2}$. 318
§ 8. Геометрическое представление гиперболических функций 319
§ 9. Гудерманниан и антигудерманниан. Зависимость между гиперболическими и тригонометрическими функциями через трансцендентный угол 321
§ 10. Обратные гиперболические функции 322
§ 11. Производные и интегралы гиперболических функций 323
§ 12. Ряды для гиперболических функций 324
§ 13. Зависимость между тригонометрическими и гиперболическими функциями того же аргумента 325
§ 14. О таблицах гиперболических функций. Вычисление гиперболических функций помощью таблиц тригонометрических функций 325
§ 15. Примеры применения гиперболических функций 327
§ 16. Формальная аналогия между тригонометрическими и гиперболическими функциями 328

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

И. Я. Штаерман. Гиперболические функции. ОНТИ, 1935, М. — Л.

§ 1. Аналитическое определение гиперболических функций

Гиперболические функции определяются следующими формулами:

1. $\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ и читается синус гиперболический *) u (1)
2. $\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ „ косинус „ *) u (2)
3. $\operatorname{th} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ „ тангенс „ *) u (3)
4. $\operatorname{cth} u = \frac{1}{\operatorname{th} u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$ „ котангенс „ *) u (4)
5. $\operatorname{sech} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ „ секанс „ *) u (5)
6. $\operatorname{cosech} u = \frac{1}{\operatorname{sh} u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}$ „ косеканс „ *) u (6)

Указанные здесь обозначения стандартные; иногда можно встретить более полные записи, как, например, $\sin \operatorname{hyp} u$, $\cos \operatorname{hyp} u$ и т. д. В иностранных руководствах пишут иногда символы тригонометрических функций, употребляя готический шрифт.

Аргумент гиперболических функций u обычно есть вещественное число, изменяющееся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Сумма и разность 1) и 2) дает

$$e^u = \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u, \tag{7}$$

$$e^{-u} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u, \tag{8}$$

что устанавливает связь между гиперболическими и показательными функциями. Эти формулы аналогичны известным формулам Эйлера

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x \tag{9}$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x \tag{10}$$

откуда следует, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{11}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{12}$$

Сравнение формул (1) и (2) с (11) и (12), а также (7) и (8) с (9) и (10) показывает, что по своей аналитической структуре гиперболические функции проще тригонометрических, так как не заключают в себе мнимых величин. Но, с другой стороны, гиперболические функции внешне аналогичны тригонометрическим.

*) или „синус гиперболикус" (sinus hyperbolicus) и т. д.

Этой аналогией и обусловлена целесообразность принятых обозначений.

§ 2. Пределы изменения гиперболических функций

Характер изменения гиперболических функций виден из нижеследующей таблицы.

u	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{th} u$	$\operatorname{cth} u$	$\operatorname{sech} u$	$\operatorname{cosech} u$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-1{,}0$	$-1{,}0$	0	0
-1	$-1{,}18\ldots$	$+1{,}54\ldots$	$-0{,}76\ldots$	$-1{,}31\ldots$	$+0{,}65\ldots$	$-0{,}85\ldots$
0	0	$+1{,}0$	0	$\mp\infty$	$1{,}0$	$\mp\infty$
$+1$	$+1{,}18\ldots$	$+1{,}54\ldots$	$+0{,}76\ldots$	$+1{,}31\ldots$	$+0{,}65\ldots$	$+0{,}85\ldots$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+1{,}0$	$+1{,}0$	0	0

На приложенных графиках (рис. 212 и 213) показаны кривые, представляющие изменение гиперболических функций, причем на рис. 213 они показаны только для первой четверти.

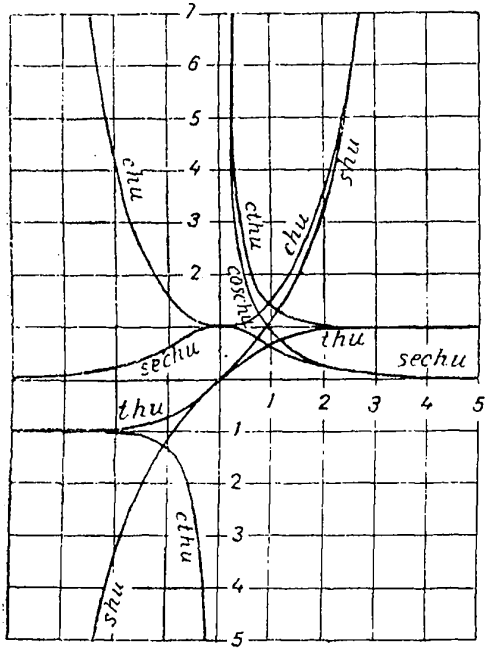


Рис. 212.

Надо обратить внимание на то, что $\operatorname{sh} u$, $\operatorname{th} u$, $\operatorname{cth} u$ и $\operatorname{cosech} u$ являются функциями взаимно однозначными, т. е. каждому значению аргумента u соответствует только одно значение функции и обратно, каждому значению функции соответствует только одно значение аргумента u. Несколько сложнее $\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sech} u$; здесь каждому значению аргумента u соответствует только одно значение $\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sech} u$, но каждому значению функции соответствуют два значения аргумента $+u$ и $-u$.

С этой точки зрения гиперболические функции проще тригонометрических.

Как видно из графиков (рис. 212) гиперболический синус может принимать какие угодно положительные и отрицательные значения. Гиперболический косинус не может быть меньше 1, тангенс, наоборот, не может быть численно больше 1. Гиперболические секанс и косинус не могут быть отрицательными, причем секанс не может быть больше 1.

Формулы (1)—(6) или графики показывают, что $\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sech} u$ функции четные, то есть:

$$\operatorname{ch}(-u) = +\operatorname{ch}(u)$$
$$\operatorname{sech}(-u) = +\operatorname{sech}(u).$$

Наоборот, $\operatorname{th} u$, $\operatorname{cth} u$, $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{cosech} u$ — функции нечетные, то есть:

$$\operatorname{sh}(-u) = -\operatorname{sh}(u) \qquad \operatorname{cosech}(-u) = -\operatorname{cosech}(u)$$
$$\operatorname{th}(-u) = -\operatorname{th}(u) \qquad \operatorname{cth}(-u) = -\operatorname{cth}(u).$$

§ 3. Соотношения между гиперболическими функциями одного и того же аргумента

1. $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$
2. $\operatorname{th}^2 u + \operatorname{sech}^2 u = 1$
3. $\operatorname{cth}^2 u + \operatorname{cosech}^2 u = 1$
4. $\operatorname{ch} u = + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u}$
5. $\operatorname{sh} u = \pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}$ { если $u > 0$, знак $+$; „ $u < 0$, знак $-$
6. $\operatorname{ch} u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 u}}$
7. $\operatorname{sh} u = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 u - 1}}$ { если $u > 0$, знак
если $u < 0$, знак

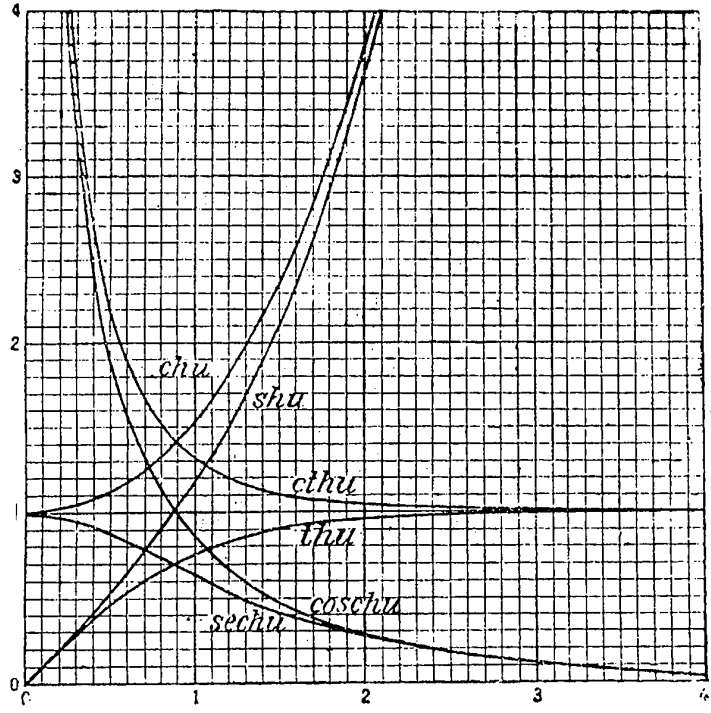


Рис. 213.

Следует помнить, что $\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sech} u$ всегда положительны; $\operatorname{sh} u$, $\operatorname{th} u$, $\operatorname{cth} u$ и $\operatorname{cosech} u$ имеют тот же самый знак, что и аргумент.

§ 4. Формулы гиперболических функций суммы и разности аргументов

$$\operatorname{sh}(u \pm v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v \qquad (1)$$

$$\operatorname{ch}(u \pm v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \qquad (2)$$

$$\operatorname{th}(u \pm v) = \frac{\operatorname{th} u \pm \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \cdot \operatorname{th} v} \qquad (3)$$

$$\operatorname{cth}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cth} u \operatorname{cth} v \pm 1}{\operatorname{cth} u \pm \operatorname{cth} v} \qquad (4)$$

В этих формулах знаки правых и левых частей равенств совпадают, что в тригонометрических формулах не всегда бывает.

§ 5. Формулы гиперболических функций двойного и половинного аргументов

$$\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \tag{1}$$

$$\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u \tag{2}$$

$$\operatorname{th} 2u = \frac{2 \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th}^2 u} \tag{3}$$

$$\operatorname{cth} 2u = \frac{\operatorname{cth}^2 u + 1}{2 \operatorname{cth} u} \tag{4}$$

$$\operatorname{ch}^2 u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u + 1) \tag{5}$$

$$\operatorname{sh}^2 u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u - 1) \tag{6}$$

$$\operatorname{ch} u = + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2}} \tag{7}$$

$$\operatorname{sh} u = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{2}} \tag{8}$$

$$\operatorname{th} u = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{ch} 2u + 1}} \tag{9}$$

$$\operatorname{ch} \frac{u}{2} = + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} u + 1}{2}} \tag{10}$$

$$\operatorname{sh} \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2}} \tag{11}$$

$$\operatorname{th} \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1}} \tag{12}$$

$$\operatorname{th} \frac{u}{2} = \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u} = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u}. \tag{13}$$

§ 6. Формулы суммы и разности гиперболических функций

$$\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{ch} \frac{1}{2}(u - v) \tag{1}$$

$$\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(u - v) \tag{2}$$

$$\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{ch} \frac{1}{2}(u - v) \tag{3}$$

$$\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(u - v) \tag{4}$$

$$\operatorname{th} u \pm \operatorname{th} v = \frac{\operatorname{sh}(u \pm v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v} \tag{5}$$

$$\operatorname{cth} u \pm \operatorname{cth} v = \pm \frac{\operatorname{sh}(u \pm v)}{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} v} \tag{6}$$

$$\frac{\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v} = \operatorname{th} \frac{1}{2}(u + v) \tag{7}$$

$$\frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v} = \operatorname{th} \frac{1}{2}(u - v) \tag{8}$$

$$\frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v}{\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v} = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(u - v)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(u + v)} \tag{9}$$

$$\frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v} = \operatorname{cth} \frac{1}{2}(u + v) \tag{10}$$

$$\frac{\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v} = \operatorname{cth} \frac{1}{2}(u - v). \tag{11}$$

§ 7. Выражение всех гиперболических функций рационально через $\operatorname{th} \frac{u}{2}$

$$\operatorname{sh} u = \frac{2 \operatorname{th} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}} = 1 : \operatorname{cosech} u \tag{1}$$

$$\operatorname{ch} u = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}} = 1 : \operatorname{sech} u \qquad (2)$$

$$\operatorname{th} u = \frac{2 \operatorname{th} \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}} = 1 : \operatorname{cth} u. \qquad (3)$$

§ 8. Геометрическое представление гиперболических функций

Само название гиперболические функции произошло вследствие того, что функции $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{ch} u$ играют ту же роль для параметрического представления равнобокой гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

какую функции $\sin t$ и $\cos t$ для окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

В самом деле, параметрическое уравнение окружности есть

$$x = a \cos t \quad \text{и} \quad y = a \sin t$$

и равнобокой гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} u \quad \text{и} \quad y = a \operatorname{sh} u,$$

так как, подставляя эти x и y в уравнение гиперболы, получим тождество

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1.$$

Уравнение неравнобокой гиперболы в параметрической форме можно представить в таком виде:

$$x = a \operatorname{ch} u \quad \text{и} \quad y = b \operatorname{sh} u.$$

Указанную аналогию можно провести еще глубже.

Аналогично тому, как тригонометрическим функциям соответствуют определенные линии в окружности радиуса, равного единице, так и гиперболическим функциям соответствуют определенные линии в равнобокой гиперболе, действительная полуось которой равна единице. Эта аналогия станет более ясной, если аргументом тригонометрических функций взять не угол φ при центре окружности, как это обычно делают, а площадь S заштрихованного сегмента $OAMA'$, как это показано на рис. 214.

При радиусе окружности, равном 1, имеем:

$$S = \varphi,$$

тогда

$$AB = \sin S, \qquad OB = \cos S.$$

Такой же геометрический смысл имеет и аргумент u гиперболических функций, но вместо площади кругового сектора $OAMA'$ надо рассматривать площадь u сектора $OMAM'$ равнобокой гиперболы (рис. 215).

Действительно, согласно формуле (26), § 5, главы V, отд. I, площадь гиперболы $S=AMN$ равна (рис. 215):

$$S=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

а в равнобокой гиперболе при $a=b=1$ будет:

$$S=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}\ln(x+y).$$

Обозначая через u заштрихованную площадь гиперболического сектора $OMAM'$, имеем, что

$$u+2S=xy=\text{площади }\triangle\ OMM',$$

откуда

$$u=\ln(x+y),$$

то есть

$$x+y=e^u.$$

Взяв обратную величину и замечая, что $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1$, получим:

$$x-y=e^{-u}.$$

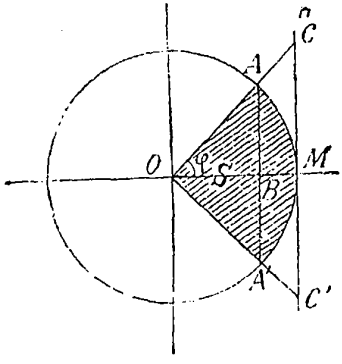


Рис. 214.

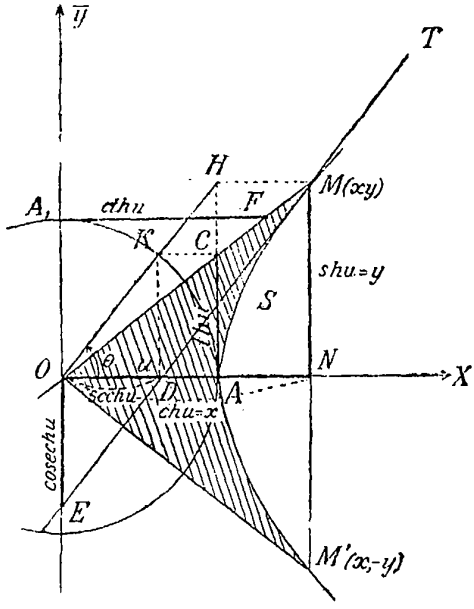


Рис. 215.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})=\operatorname{ch}u=ON\\ y&=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})=\operatorname{sh}u=NM\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Деля одно на другое, получим

$$\frac{y}{x}=\operatorname{th}u=\frac{AC}{1}=AC.\qquad(2)$$

Чтобы обнаружить геометрический смысл других гиперболических функций, обратимся к тому же рис. 215. Через точку A_1 проведем касательную к окружности AKA_1, параллельную оси X, и заметим точку F пересечения ее с линией OM; тогда

$$A_1F=\operatorname{cth}u.\qquad(3)$$

Проведем касательную MT к гиперболе в точке M и заметим точки D и E пересечения ее с осями OX и OY; тогда

$$\left.\begin{aligned} OD &= \operatorname{sech} u \\ OE &= \operatorname{cosech} u \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

§ 9. Гудерманниан (трансцендентный угол) и антигудерманниан. Зависимость между гиперболическими и тригонометрическими функциями через трансцендентный угол

Проведя через точку A (рис. 215) перпендикуляр к оси X, а через точку $M(xy)$ на равнобокой гиперболе прямую, параллельную оси X, заметим точку H их пересечения; эту точку H соединим с центром гиперболы и обозначим угол AOK через θ.

Угол θ называется трансцендентным углом или гиперболической амплитудой. Величина его лежит в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Через трансцендентный угол θ устанавливается зависимость между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Из рис. 215 видно, что

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} u &= \sec\theta & \operatorname{cth} u &= \operatorname{cosec}\theta \\ \operatorname{sh} u &= \operatorname{tg}\theta & \operatorname{cosech} u &= \operatorname{ctg}\theta \\ \operatorname{th} u &= \sin\theta & \operatorname{sech} u &= \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Угол θ называют также гудерманнианом от аргумента u; записывают эту функцию таким символом:

$$\theta = \operatorname{gd} u \tag{2}$$

и читают: θ есть гудерманниан u или ге-де-у.

Зависимость между θ и u устанавливается таким образом:

$$e^u = \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

откуда

$$u = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right). \tag{3}$$

Как известно, такой формулой выражаются меридиональные части D сферы для данной широты φ, т. е. $D = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$. Так как

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1}} = \operatorname{th}\frac{u}{2},$$

то получается вторая зависимость между θ и u

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{th}\frac{u}{2}, \tag{4}$$

называемая формулой Лезана.

В теории гиперболических функций угол θ обычно считают функцией от аргумента u, а не наоборот, как это выражено формулой (3) и как считают, например, в навигации. Поэтому и принято, как сказано выше, такое символическое обозначение $\theta = \operatorname{gd} u$ как основное.

В силу этого формула (3) представляет собой функцию, обратную гудерманниану и называемую иногда антигудерманниан; обозначают ее:

$$u = \arg \operatorname{gd} \theta$$

и читают: u есть аргумент гудерманниана θ или, по английской системе обозначения,

$$\operatorname{gd}^{-1} u,$$

что и равносильно выражению (3).

Таким образом, можно сказать, что с точки зрения гиперболических функций широта есть гудерманниан меридиональных частей, а меридиональные части представляют собой функцию, обратную гудерманниану широты, т. е. антигудерманниан широты. График функции гудерманниана показан на рис. 216. Легко видеть, что по мере увеличения аргумента u гудерманниан $\operatorname{gd} u = \theta$ приближается к значению $\frac{\pi}{2}$. Действительно, по формуле Лезана имеем в пределе

$$\lim_{u \to \infty} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \lim_{u \to \infty} \operatorname{th} \frac{u}{2}.$$

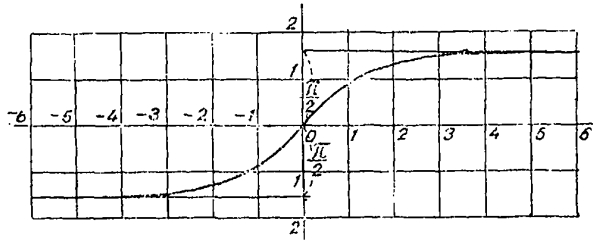


Рис. 216.

Так как $\lim \operatorname{th} \frac{u}{2} = 1$, то $\lim \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1$, т. е. $\lim \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ или $\lim \theta = \frac{\pi}{2}$. Это свойство гудерманниана хорошо видно на рис. 216 и легко заметить, что по мере увеличения u $y = \operatorname{gd} u$ асимптотически приближается к $\frac{\pi}{2}$. Так, например, при $u = 3{,}0$ из таблиц функции $\operatorname{gd} u$ найдем, что

$$\theta = 1{,}5705 \left(\frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \ldots \right).$$

§ 10. Обратные гиперболические функции

Подобно обратным тригонометрическим функциям $\arcsin y$, $\operatorname{arc tg} y$ и т. д. рассматривают обратные гиперболические функции и обозначают их так: если $y = \operatorname{sh} u$, то обратной функцией гиперболическому синусу будет площадь гиперболического сектора u, которому соответствует заданный гиперболический синус, и обозначают это таким символом:

$$u = \operatorname{Ar\,sh}\, y,$$

что означает: u есть площадь (Ar — сокращенно. Area — площадь), гиперболический синус которой равен величине y. Указанный символ читают так:

u есть арсинус гиперболический от y.

Таким же образом вводят обозначения и для остальных обратных гиперболических функций.

Формулы обратных гиперболических функций.

Если $y=\operatorname{sh} u$, то $u=\operatorname{Ar\,sh} y=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

„ $y=\operatorname{ch} u$, то $u=\operatorname{Ar\,ch} y=\pm\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$

„ $y=\operatorname{th} u$, то $u=\operatorname{Ar\,th} y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ при $|y|<1$

„ $y=\operatorname{cth} u$, то $u=\operatorname{Ar\,cth} y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$ при $|y|>1$

„ $y=\operatorname{sech} u$, то $u=\operatorname{Ar\,sech} y=\pm\ln\left(\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}\right)=$
$=\operatorname{Ar\,ch}\left(\frac{1}{y}\right)$

„ $y=\operatorname{cosech} u$, то $u=\operatorname{Ar\,cosech} y=\ln\left(\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}\right)=$
$=\operatorname{Ar\,sh}\left(\frac{1}{y}\right)$.

Аналогично формулам сложения и вычитания гиперболических функций существуют формулы сложения и вычитания обратных гиперболических функций.

$$\operatorname{Ar\,sh} u\pm\operatorname{Ar\,sh} v=\operatorname{Ar\,sh}\left[u\sqrt{1+v^2}\pm v\sqrt{1+u^2}\right]$$

$$\operatorname{Ar\,ch} u\pm\operatorname{Ar\,ch} v=\operatorname{Ar\,ch}\left[uv\pm\sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}\right]$$

$$\operatorname{Ar\,th} u\pm\operatorname{Ar\,th} v=\operatorname{Ar\,th}\left(\frac{u\pm v}{1\pm uv}\right)$$

$$\operatorname{Ar\,cth} u\pm\operatorname{Ar\,cth} v=\operatorname{Ar\,cth}\left(\frac{uv\pm 1}{v\pm u}\right).$$

§ 11. Производные и интегралы гиперболических функций

Если $y=\operatorname{sh} u=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$,

то производная от y, считая u переменной независимой, выходит

$$y'=(\operatorname{sh} u)'=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})=\operatorname{ch} u.$$

Подобным же образом можно составить другие производные и получить следующую таблицу производных гиперболических функций:

1. $y'=(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u$
2. $y'=(\operatorname{ch} u)'=\operatorname{sh} u$
3. $y'=(\operatorname{th} u)'=\operatorname{sech}^2 u$
4. $y'=(\operatorname{cth} u)'=-\operatorname{cosech}^2 u$
5. $y'=(\operatorname{sech} u)'=-\operatorname{sech} u\operatorname{th} u$
6. $y'=(\operatorname{cosech} u)'=-\operatorname{cosech} u\operatorname{cth} u$.

Производные обратных гиперболических функций представлены в нижеследующей таблице:

$$1.\ (\operatorname{Ar\,sh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$2.\ (\operatorname{Ar\,ch} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad |y| \geqslant 1$$

$$3.\ (\operatorname{Ar\,th} y)' = \frac{1}{1-y^2} \qquad |y| < 1$$

$$4.\ (\operatorname{Ar\,cth} y)' = \frac{1}{1-y^2} \qquad |y| > 1$$

$$5.\ (\operatorname{Ar\,sech} y)' = -\frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}$$

$$6.\ (\operatorname{Ar\,cosech} y)' = -\frac{1}{y\sqrt{y^2+1}}.$$

Таким же образом для гудерманниана и функции обратной, т. е. антигудерманниана, имеем:

$$7.\ \theta = \operatorname{gd} u \qquad \theta' = \frac{d\theta}{du} = (\operatorname{gd} u)' = \operatorname{sech} u$$

$$8.\ u = \operatorname{Arg\,gd}\theta \quad u' = \frac{du}{d\theta} = (\operatorname{Arg\,gd}\theta)' = \sec\theta$$

$$1.\ \int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C \qquad 8.\ \int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$$

$$2.\ \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \qquad 9.\ \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$$

$$3.\ \int \operatorname{sech} u \operatorname{th} u\, du = -\operatorname{sech} u + C \qquad 10.\ \int \operatorname{cosech} u \operatorname{cth} u\, du = -\operatorname{cosech} u + C$$

$$4.\ \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \operatorname{Ar\,sh} y + C \qquad 11.\ \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{Ar\,ch} y + C \ (\text{при } y \geqslant 1)$$

$$5.\ \int \frac{dy}{1-y^2} = \operatorname{Ar\,th} y + C \qquad 12.\ \int \frac{dy}{1-y^2} = \operatorname{Ar\,cth} y + C \ (\text{при } |y| > 1)$$
(при $|y| < 1$)

$$6.\ \int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} = -\operatorname{Ar\,sech} y + C \qquad 13.\ \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2+1}} = -\operatorname{Ar\,cosech} y + C$$
(при $0 < x < 1$)

$$7.\ \int \operatorname{th} u\, du = \ln \operatorname{ch} u + C \qquad 14.\ \int \operatorname{cth} u\, du = \ln \operatorname{sh} u + C$$

$$15.\ \int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{gd} u + C.$$

§ 12. Ряды для гиперболических функций

$$1.\ \operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \cdots$$

$$2.\ \operatorname{sh} u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots$$

Эти ряды сходятся при любых значениях u.

$$3.\ \operatorname{th} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} - \frac{17u^7}{315} + \cdots$$

$$4.\ \operatorname{cth} u = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} - \frac{u^3}{45} + \frac{2}{945}u^5 + \ldots$$

5. $\operatorname{sech} u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{5}{24} u^4 - \frac{61}{720} u^6 + \dots$

6. $\operatorname{cosech} u = \frac{1}{u} - \frac{u}{6} + \frac{7}{360} u^3 - \frac{31}{15120} u^5 + \dots$

7. $6 = \operatorname{gd} u = u - \frac{1}{6} u^3 + \frac{1}{24} u^5 - \frac{61}{5040} u^7 + \dots \quad u^2 < \frac{\pi^2}{4}$

8. $\theta = \operatorname{gd} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sech} u - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sech}^3 u}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{\operatorname{sech}^5 u}{5} - \dots$ при всяких значениях u

9. $u = \operatorname{Ar\,sh} y = y - \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{y^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{y^7}{7} + \dots \quad y^2 < 1$

$= \ln 2y + \frac{1}{2} \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{4y^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{1}{6y^6} - \dots \quad y > 1$

10. $u = \operatorname{Ar\,ch} y = \ln 2y - \frac{1}{2} \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{4y^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{1}{6y^6} - \dots \quad |y| > 1$

11. $u = \operatorname{Ar\,th} y = y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{7} y^7 + \dots \quad y^2 < 1$

12. $u = \operatorname{Ar\,cth} y = \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{7y^7} + \dots \quad y^2 > 1$

13. $u = \operatorname{Arg\,gd} \theta = \theta + \frac{1}{6} \theta^3 + \frac{1}{24} \theta^5 + \frac{61}{5040} \theta^7 + \dots \quad \theta < \frac{\pi}{2}$

14. $\ln \operatorname{sh} u = \ln u + \frac{1}{6} u^2 - \frac{1}{180} u^4 + \frac{1}{2835} u^6 - \dots \quad u^2 < \pi^2$

15. $\ln \operatorname{ch} u = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{12} u^4 + \frac{1}{45} u^6 - \frac{17}{2520} u^8 + \dots \quad u^2 < \frac{\pi^2}{4}$

16. $\ln \operatorname{th} u = \ln u - \frac{1}{3} u^2 + \frac{7}{90} u^4 - \frac{62}{2835} u^6 + \dots \quad u^2 < \frac{\pi^2}{4}.$

§ 13. Зависимость между тригонометрическими и гиперболическими функциями того же аргумента

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix \tag{1}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh} ix \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -i \operatorname{th} ix \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \operatorname{cth} ix \tag{4}$$

$$\cos ix = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x \tag{5}$$

$$\sin ix = \frac{i}{2} (e^x - e^{-x}) = i \operatorname{sh} x. \tag{6}$$

§ 14. О таблицах гиперболических функций. Вычисление гиперболических функций помощью таблиц тригонометрических функций

Гиперболические функции нередко бывают чрезвычайно удобны для практических вычислений. Необходимые при этом таблицы этих функций и их обыкновенных логарифмов существуют в разных специальных изданиях и разных справочных сборниках, как например: 1) в I томе известного справочника Hütte (имеется русское повторное издание); 2) в справочнике по математике Т. Дуббель; здесь же приведены и таблицы обыкновенных логарифмов этих функций; 3) в превосходных четырехзначных таблицах L. M. Milne — Thomson and

L. J. Comrie: Standart four-figure Mathematical Tables; Macmillan. London. 1931; 4) имеются прекрасные таблицы д-ра Лиговского. Таблицы гиперболических и тригонометрических функций, издание ВТУ. Довольно много таблиц этого рода издано заграницей, например: G. F. Becker and C. E. Van Orstrand, Hyperbolic Function, Smithsonian mathematical Tables, Washington, 1931.

Во многих случаях вместе с таблицами гиперболических функций приводят величины e^x и e^{-x}; впрочем, при наличии таблиц гиперболических функций получение этих величин делается просто; так как

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x,$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

Обычно аргументы таблиц гиперболических функций представляют собой отвлеченные числа. Если нужно иметь аргументы в градусной мере, то помощью таблицы № 56 Мореходных таблиц 1943 г. легко отвлеченную меру угла перевести в градусную.

Если нет под руками таблиц гиперболических функций, то эти последние могут быть найдены, пользуясь известными таблицами меридиональных частей и натуральных тригонометрических функций. Делается это следующим образом.

Допустим, что мы желаем аргументом u гиперболических функций взять угол, выраженный в градусной мере. Заданную в градусах меру угла умножаем на 60 и произведение принимаем за меридиональные части; обратным входом в таблицу меридиональных частей находим соответствующий аргумент (или широту), который обозначим через θ сообразно принятой выше системе.

Из таблиц натуральных тригонометрических функций (например, известные таблицы Петерса) выбираем для этого значения угла последовательно

$$\operatorname{tg}\theta,\ \sec\theta,\ \sin\theta,\ \operatorname{cosec}\theta,\ \cos\theta,\ \operatorname{ctg}\theta. \qquad (\alpha)$$

Согласно формулам (1) эти величины равны соответственно гиперболическим функциям:

$$\operatorname{sh} u,\ \operatorname{ch} u,\ \operatorname{th} u,\ \operatorname{cth} u,\ \operatorname{sech} u,\ \operatorname{cosech} u. \qquad (\beta)$$

Если вместо натуральных величин тригонометрических функций угла θ возьмем обыкновенные логарифмы указанных в (α) функций, то в ряду (β) получим обыкновенные логарифмы гиперболических функций.

В приводимой ниже таблице дан образец вычислений гиперболических функций через 1° от 40° до 45°, вычисленных помощью меридиональных частей, приводимых в разных сборниках навигационных таблиц.

Само собой разумеется, что меридиональные части должны соответствовать сфере, а не сфероиду.

Примечание. При отсутствии таблиц меридиональных частей можно ограничиться одними тригонометрическими таблицами, вычисляя трансцендентный угол θ по формуле

$$\lg \operatorname{tg}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right) = \mu \operatorname{arc} u,$$

где μ — модуль системы обыкновенных логарифмов.

Вычисление гиперболических функций

u	u'	θ	$\operatorname{tg}\theta$ $\operatorname{sh} u$	$\sec\theta$ $\operatorname{ch} u$	$\sin\theta$ $\operatorname{th} u$	$\operatorname{cosec}\theta$ $\operatorname{cth} u$	$\cos\theta$ $\operatorname{sech} u$	$\operatorname{ctg}\theta$ $\operatorname{cosech} u$
40°	2400′	37° 5′,88	0,75624	1,25376	0,60318	1,65788	0,79760	1,32294
41	2460	37 53 ,48	0,77824	1,26714	0,61417	1,62823	0,78917	1,28496
42	2520	38 40 ,58	0,80047	1,28092	0,62492	1,60020	0,78069	1,24926
43	2580	39 27 ,17	0,82295	1,29509	0,63545	1,57370	0,77215	1,21514
44	2640	40 13 ,24	0,84568	1,30965	0,64573	1,54863	0,76356	1,18247
45	2700	40 58 ,80	0,86868	1,32461	0,65580	1,52486	0,75491	1,15118

Вычисление логарифмов гиперболических функций

u	lg sh u	lg ch u	lg th u	lg cth u	lg sech u	lg cosech u
40′	9,87866	0,09821	9,78045	0,21955	9,90179	0,12134
41	89111	10283	78829	21171	89717	10889
42	90335	10752	79582	20418	89248	09665
43	91537	11230	80308	19692	88770	08163
44	92721	11716	81006	18994	88284	07279
45	93886	12209	81677	18323	87791	06114

§ 15. Примеры применения гиперболических функций

В настоящее время гиперболические функции все больше и больше входят в употребление при решении разных технических задач. Приведем несколько примеров.

а) В главе 1 отд. I, § 27 приведены простые и удобные формулы для решения кубических уравнений помощью гиперболических функций. В главе 1, отд. II, § 16 приведен пример решения такого уравнения, встречающегося в теории гирокомпасов.

б) Гибкая нерастяжимая нить, подвешенная за концы, под действием силы тяжести в положении равновесия принимает форму, которая определяется через гиперболический косинус.

в) Уравнение кривой равных высот 1-го рода (замкнутой) на меркаторской карте, отнесенное к центру и главным осям, имеет форму:

$$\operatorname{ch}\eta = \cos\xi \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{sh}\eta = \cos A \operatorname{sh} a$$

Здесь ξ и η — координаты точки, причем ось η совпадает с изображением круга склонения светила; a — большая полуось, идущая вдоль этого круга склонения; A — азимут светила в точке, соответственной координатам (ξ и η).

Уравнение кривой 2-го рода (разомкнутой) имеет такой вид:

$$\operatorname{sh}\eta = -\cos\xi \operatorname{sh} a$$

$$\operatorname{ch}\eta = -\cos A \operatorname{ch} a.$$

г) Уравнение большого круга на меркаторской карте, отнесенное к экватору и среднему меридиану (меридиан полюса), имеет вид:

$$\operatorname{sh} y = -\cos x \operatorname{ctg}\delta$$
$$\operatorname{ch} y = -\cos A \operatorname{cosec}\delta.$$

Здесь δ — широта полюса большого круга.

д) Якорный канат стоящего на якоре корабля принимает форму кривой, уравнение которой выражается через гиперболические функции. Помощью этих функций решаются также и некоторые другие вопросы, связанные с корабельными якорными устройствами.

е) Общий интеграл дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' - n^2 y = 0$$

в гиперболических функциях имеет вид:

$$y = B_1 \operatorname{sh} nt + B_2 \operatorname{ch} nt$$

и т. д.

§ 16. Формальная аналогия между тригонометрическими и гиперболическими функциями

Тригонометрические функции	Гиперболические функции
1. $\sin x = \frac{1}{2}(e^{xi} - e^{-xi})$	1. $\operatorname{sh} u = \frac{1}{2}(e^{u} - e^{-u})$
2. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$	2. $\operatorname{ch} u = \frac{1}{2}(e^{u} + e^{-u})$
3. $\operatorname{tg} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i(e^{xi} + e^{-xi})}$	3. $\operatorname{th} u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$
4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$	4. $\operatorname{cth} u = \frac{1}{\operatorname{th} u}$
5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$	5. $\operatorname{sh} u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots$
6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$	6. $\operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots$
7. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	7. $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$
8. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	8. $1 - \operatorname{th}^2 u = \operatorname{sech}^2 u$
9. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	9. $\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$
10. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	10. $\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u$
11. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	11. $\operatorname{sh}(u \pm v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$
12. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	12. $\operatorname{ch}(u \pm v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$
13. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u$
14. $(\cos x)' = -\sin x$	14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u$
15. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	15. $\int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + C$
16. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	16. $\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ 1. Математические постоянные 331
§ 2. Астрономические постоянные 332
§ 3. Геодезические и геофизические постоянные 333
§ 4. Международная метрическая система единиц 334
§ 5. Технические системы единиц 335
§ 6. Светотехнические единицы 338
§ 7. Акустические единицы 338
§ 8. Некоторые технические постоянные и величины 338
§ 9. Точные соотношения между русскими и метрическими мерами . . . 339
§ 10. Английские меры длины, веса и жидкостей 341
§ 11. Приближенные соотношения между английскими и метрическими мерами 342
§ 12. Коэфициенты линейного расширения 343
§ 13. Распространение звука в различных средах 343
§ 14. Плотность ртути при разной температуре 343
§ 15. Плотность различных твердых тел при комнатной температуре . . . 344
§ 16. Упругие свойства твердых тел 344
§ 17. Плотность растворов этилового спирта C_2H_6O при разной температуре 345
§ 18. Показатели преломления для линии D 345
§ 19. Показатели постоянные для оптической системы нормального человеческого глаза 345
§ 20. Спектр колебаний 346
§ 21. Единицы длин волн 347
§ 22. Длины волн главных фраунгоферовых линий 347
§ 23. Постоянные величины в метеорологии 347
§ 24. Плотность сухого воздуха D относительно воды при 4° С 348
§ 25. Плотность некоторых газов 349
§ 26. Плотность некоторых газов δ относительно воздуха при $t=0°$ и 760 *мм* 349
§ 27. Упругость паров воды в *мм* ртутного столба 349
§ 28. Упругость паров воды над льдом в *мм* 350
§ 29. Плотность воды 350
§ 30. Таблица скорости звука в воде (горизонтальная скорость) 351
§ 31. Дальность горизонтальной видимости в море (днем) 351
§ 32. Длина (λ), скорость (c) и период (τ) трохоидальной волны 351
§ 33. Шкала ветра (Бофорта) 352
§ 34. Шкала состояния моря 354
§ 35. Перевод скоростей в узлах в скорости в *см/сек* и обратно 355

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. П. Афанасьев. Таблицы физических величин, ГТТИ, М., 1933, М.
2. Н. Н. Зубов. Океанологические таблицы. Гидрометиздат, М., 1940.
3. Астрономический Ежегодник на 1941 и 1942 гг. Изд. Астрономического института Академии наук СССР.

§ 1. Математические постоянные

	Число	lg		Число	lg
π	3,14159 26536	0,49714 98727	$\frac{1}{\pi}$	0,31830 98862	9,50285 01273
2π	6,28318 53062	0,79817 98684	$\frac{1}{2\pi}$	0,15915 49431	9,20182 01316
$\frac{\pi}{2}$	1,57079 63268	0,19611 98770	$\frac{2}{\pi}$	0,63661 97724	9,80388 01230
$\frac{\pi}{3}$	1,04719 75512	0,02002 86180	$\frac{3}{\pi}$	0,95492 96586	9,97997 13820
$\frac{\pi}{4}$	0,78539 81634	9,89508 98814	$\frac{4}{\pi}$	1,27323 95447	0,10491 01186
π^2	9,86960 44011	0,99429 97454	$\frac{1}{\pi^2}$	0,10132 11836	9,00570 02546
$\sqrt{\pi}$	1,77245 38509	0,24857 49363	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,56418 95835	9,75142 50637
$\sqrt{2\pi}$	2,50662 82746	0,39908 99342	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,39894 22804	9,60091 00658
$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,88622 69255	9,94754 49407	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,12837 91671	0,05245 50593
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,25331 41373	0,09805 99385	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,79788 45608	9,90194 00615
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459 18876	0,16571 66242	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,68278 40633	9,83428 33758
e	2,71828 18285	0,43429 44819	$\frac{1}{e}$	0,36787 94412	9,56570 55181
$\sqrt{e}$	1,64872 12707	0,21714 72410	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	0,60653 06597	9,78285 27590
$e^{\frac{\pi}{2}}$	4,81047 73810	0,68218 81769	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0,20787 95764	9,31781 18231
e^{π}	23,14069 26328	1,36437 63538	$e^{-\pi}$	0,04321 39183	8,63562 36462
$e^{2\pi}$	535,49165 55248	2,72875 27077	$e^{-2\pi}$	0,00186 74427	7,27124 72923
$\mu = \lg e$	0,43429 44819	9,63778 43113	$\frac{1}{\mu} = \ln 10$	2,30258 50930	0,36221 56887
$\sqrt{2}$	1,41421 35624	0,15051 49978	$\sqrt[3]{2}$	1,25992 10499	0,10034 33319
$\sqrt{3}$	1,73205 08076	0,23856 06274	$\sqrt[3]{3}$	1,44224 95703	0,15904 04182

Продолжение

	Число	lg		Число	lg
$\sqrt{5}$	2,23606 79775	0,34948 50022	$\sqrt[3]{5}$	1,70997 59467	0,23299 00014
$\sqrt{10}$	3,16227 76602	0,50000 00000	$\sqrt[3]{10}$	2,15443 46900	0,33333 33333
1 рад.	57°,29577 95131	1,75812 26324	ln 2	0,69314 71806	
„	3437′,746 77078	3,53627 38828	ln π	1,14472 98858	
„	206264″.80625	5,31442 51332	ln 100	4,60517 01816	

arc 1° = 0,01745 32925 2 lg arc 1° = 8,24187 73676
arc 1′ = 0,00029 08882 087 lg arc 1′ = 6,46372 61172
arc 1″ = 0,00000 48481 36811 lg arc 1″ = 4,68557 48668

§ 2. Астрономические постоянные

Постоянная солнечного параллакса . . . . . 8″,80
„ аберрации 20,47
„ нутации 9,21
Гравитационная постоянная $f = 0{,}00029\,59122$
Скорость света в пустоте 299774 *км/сек* (Michelson и Pease)
Астрономическая единица расстояний
(средн. расст. от Земли до Солнца) $149{,}5 \times 10^6$ *км*.

Солнце

Продолжит. тропического года . . 365,242199 ср. солн. сут.
„ звездного года . . . . 365,256360 „ „ „ } (Newcomb)

Полудиаметр Солнца при среднем расстоянии . . 16′1″,18
Радиус Солнца . . . . . $6{,}955 \times 10^5$ *км*
Масса Солнца . . . . . $1{,}983 \times 10^{33}$ *г*.

Луна

Продолжит. синодического месяца . 29,5306 ср. солн. сут.
„ звездного „ . 27,3217 „ „ „
Постоянная лунного параллакса . . 57′2″,70 } (Brown)

Расстояние от Земли до Луны . . . . . $3{,}844 \times 10^5$ *км*
Средний полудиаметр . . . . . 15′32″,58 (Newcomb)
Радиус Луны . . . . . 1738 *км*
Отношение массы Земли к массе Луны . . . . 81,53 (Hinks)
Масса Луны . . . . . $7{,}182 \times 10^{25}$ *г*.

Средние солн. сутки в звездных сутках $1{,}00273791 = 24^h3^m56^s{,}555$
Звездные сутки в ср. солн. сутках $0{,}99726957 = 23^h56^m4^s{,}091$
Световой год = $9{,}463 \times 10^{12}$ *км* = 63290 астр. един. = 0,3069 парсека
1 парсек = $30{,}84 \times 10^{12}$ *км* (расстояние до звезды с параллаксом 1″)
= 206265 астр. един. = 3,259 св. года.

§ 3. Геодезические и геофизические постоянные

А. Размеры земного сфероида (в *м*)

Бесселя (1841)	$a = 6\,377\,397$	$\alpha = 1 : 299{,}15 \pm 4{,}67$
Международный (1924)	$a = 6\,378\,388 \pm 18$	$\alpha = 1 : 297 \pm 0{,}5$
Красовского (1940) *)	$a = 6\,378\,245$	$\alpha = 1 : 298{,}3$

Б. Величины, зависящие от сжатия сфероида

	Бесселя	Международ.	Красовского
$\alpha = \frac{a-b}{a}$	0,003 342 773	0,003 367 003	0,003 352 330
$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$	0,006 674 372	0,006 722 670	0,006 693 422
$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$	0,006 719 219	0,006 768 170	0,006 738 525
$m = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{e^2}{2-e^2}$	0,003 348 360	0,003 372 672	0,003 357 949
$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\alpha}{2-\alpha}$	0,001 674 185	0,001 686 341	0,001 678 979

Таблица радиусов *R* Земли, принимая ее за правильную сферу

По Бесселю (*м*)	Международный (*м*)	По Красовскому (*м*)	Характеристика радиуса *R*
6 370 283	6 371 221	6 371 110	Объем шара равен объему сфероида
6 370 290	6 371 228	6 371 116	Поверхн. шара равна поверхности сфер.
6 366 743	6 367 655	6 367 559	Окружность большого круга, равная длине эллиптического меридиана
6 370 291	6 371 229	6 371 118	Средний арифм. $\frac{1}{3}(a+a+b)$
6 366 707	6 366 707	6 366 707	Соответственно установленной длине морской мили 1852 *м*

Дуги меридиана и параллелей

Широта	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
Длина 1° меридиана . .	110,6	110,6	110,7	110,8	111,0	111,2	111,4	111,5	111,6 *км*
Длина 1° параллели . .	111,3	109,6	104,6	96,5	85,4	71,7	55,6	38,2	19,1 *км*

Поверхность земного сфероида $510\,101 \times 10^3$ *км*^{2}
(по разм. междунар. эллипсоида 1924)
Объем земн. сфероида $1\,083\,820 \times 10^6$ *км*^{3}
Угловая скорость вращения Земли $\omega = 0{,}00007292$ *сек*$^{-1}$.

Ускорение силы тяжести

Helmert (1908) $g = 978{,}030\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi - 0{,}0000070 \sin^2 2\varphi)$ *см/сек*^{2}
Cassinis (1930) $g = 978{,}049\,(1 + 0{,}00528845 \sin^2\varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi)$ *см/сек*^{2}
(международн.)

*) Постановление Совета Министров № 760 от 7 апреля 1946 г.

Таблица величин g (по Helmert)

Широта	g	Широта	g	Широта	g
0°	978,030	35°	979,730	70°	982,606
5	978,069	40	980,166	75	982,866
10	978,186	45	980,616	80	983,058
15	978,376	50	981,066	85	983,176
20	978,634	55	981,503	90	983,216
25	978,952	60	981,914	Москва	981,523
30	979,321	65	982,285	Ленинград	981,908

Масса Земли $5{,}975 \times 10^{27}$ *г*
Средняя плотность Земли 5,517 $г/см^{-3}$
Средняя плотность земной коры 2,66.

Таблица плотностей Земли (δ)

№№ пп.	Расстояние от центра	δ	Глубина (*км*)
1	Центр	11,30	6370
2	В расст. $0{,}2R$	10,88	5096
3	„ $0{,}4R$	9,50	3822
4	„ $0{,}6R$	7,47	2548
5	„ $0{,}8R$	5,05	1274
6	Поверхн. слой	2,66	0

§ 4. Международная метрическая система единиц

Основными единицами являются:

Метр (*м*)
Килограмм (*кг*)
Литр (*л*).

Первичными единицами системы являются:

Метр (*м*)
Микрон (μ) $= 10^{-6}$ метра
Грамм (*г*) $= 10^{-3}$ килограмма
Литр (*л*) $= 10^{3}$ куб. сантиметров
Ар (*а*) = площадь квадрата, у которого сторона имеет длину **10 *м***
Стер (*ст*) = объем куба с ребром, равным 1 *м*.

Вторичные единицы

мм — миллиметр $= 10^{-3}$ *м*
см — сантиметр $= 10^{-2}$ *м*
дц — дециметр $= 10^{-1}$ *м*
дкм — декаметр $= 10$ *м*
гм — гектометр $= 10^{2}$ *м*
км — километр $= 10^{3}$ *м*
Мм — мириаметр $= 10^{4}$ *м*
мегаметр $= 10^{6}$ *м*
μг — микрограмм $= 10^{-6}$ *г*
мг — миллиграмм $= 10^{-3}$ *г*

сг — сантиграмм $= 10^{-2}$ *г*
дг — дециграмм $= 10^{-1}$ *г*
дкг — декаграмм $= 10$ *г*
гг — гектограмм $= 10^{2}$ *г*
кг — килограмм $= 10^{3}$ *г*
кв — метрич. квинтал $= 10^{2}$ *кг* $= 10^{5}$ *г*
т — метрич. тонна $= 10^{3}$ *кг* $= 10^{6}$ *г*
к — метрич. карат $= 200$ *мг*.

§ 5. Технические системы единиц

1. Система CGS. Основные единицы: сантиметр (*см*), грамм (*г*), секунда (*сек*).

Особые названия имеют: единица силы — дин (*дн*); единица давления — бар (*б*); единица работы — эрг (*э*); 10^{7} эргов — джоуль (*дж*); единица мощности — джоуль в секунду — ватт (*вт*).

2. Система MTS. Основные единицы: метр (*м*), тонна — масса (*т*), секунда (*сек*).

Особые названия имеют: единица силы — стен (*сн*); единица давления — пьеза (*пз*): 100 единиц давления — гектопьеза (*гпз*); единица работы — стенметр или килоджоуль (*кдж*); единица мощности — киловатт (*квт*).

3. Система MKS. Основные единицы: метр (*м*); килограмм-сила (*кГ*), секунда (*сек*).

Особые названия имеют: единица работы — килограмм-метр (*кГм*) 75 килограмм-метров в секунду — лошадиная сила (HP, *л. с.*); 10 000 единиц давления — техническая атмосфера (*ат*) или килограмм-сила на квадратный сантиметр ($кГ/см^2$).

1 *Г* (сила) $=$ 1 *г* массы $\times$ 981 $=$ 981 *дн*

1 *Г* (сила) $=$ 981 *g* массы ($см/сек^{-2}$) $=$ 981 *дн*

1 *г* массы $= 981^{-1}$ *Г* силы ($см^{-1}$) ($сек^{2}$)

Соотношения между единицами разных систем

Единицы	II / I	III*) / I	III*) / II	II**) / III	I / II	I**) / III
Массы	10^{6}	$9{,}8 \cdot 10^{3}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	10^{-6}	$1{,}02 \cdot 10^{-4}$
Длины	10^{2}	10^{2}	1	1	10^{-2}	10^{-2}
Площади	10^{4}	10^{4}	1	1	10^{-4}	10^{-4}
Объема	10^{6}	10^{6}	1	1	10^{-6}	10^{-6}
Плотности	1	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	1	$1{,}02 \cdot 10^{3}$
Скорости	10^{2}	10^{2}	1	1	10^{-2}	10^{-2}
Ускорения	10^{2}	10^{2}	1	1	10^{-2}	10^{-2}
Силы	10^{6}	$9{,}8 \cdot 10^{5}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	10^{-6}	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$
Давления	10^{4}	$9{,}8 \cdot 10^{1}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	10^{-4}	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$
Работы, энергии	10^{10}	$9{,}8 \cdot 10^{7}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	10^{-10}	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$
Мощности	10^{10}	$9{,}8 \cdot 10^{7}$	$9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{3}$	10^{-10}	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$
Момента инерции	10^{10}	$9{,}8 \cdot 10^{9}$	$9{,}8 \cdot 10^{-1}$	$1{,}02 \cdot 10^{0}$	10^{-10}	$1{,}02 \cdot 10^{-10}$

*) При расчетах с точностью, превышающей 0,1%, коэфициент 9,8 следует заменить коэфициентом 9,80665.

**) При расчетах с точностью, превышающей 0,1%, коэфициент 1,02 следует заменить коэфициентом 1,01972.

Единицы для измерения физических величин

Основные единицы. За основные единицы для механических и тепловых величин обыкновенно принимают единицы: массы (m), длины (l), времени (t) и температуры (0).

В электростатической системе к ним присоединяют единицу диэлектрической постоянной (ε), а в электромагнитной системе — единицу магнитной проницаемости (μ).

В международной системе электрических и магнитных единиц за основные единицы принимают единицы: длины (l), сопротивления (r), силы тока (i) и времени (t).

Производные единицы. Величины производных единиц зависят от величин основных единиц. Эта зависимость выражается формулами размерности, которые для механических единиц имеют вид $m^x l^y t^z$, а для тепловых $m^x l^y t^z 0^v$, для электростатических $m^x l^y t^z \varepsilon^v$, для электромагнитных $m^x l^y t^z \mu^v$, для международных $r^x l^y i^z t^v$.

Механические и тепловые единицы

Величина	Символ	Показатели размерности				Название единицы
		$x\,(m)$	$y\,(l)$	$z\,(t)$	$v\,(0)$	
Угол		0	0	0	0	радиан
Масса	m	1	0	0	0	грамм (*г*)
Длина	l	0	1	0	0	сантиметр (*см*)
Время	t	0	0	1	0	секунда (*сек*)
Площадь		0	2	0	0	*кв. см* ($см^2$)
Объем		0	3	0	0	*куб. см* ($см^3$)
Кривизна		0	−1	0	0	
Плотность		1	−3	0	0	
Скорость		0	1	−1	0	
Угловая скорость	ω	0	0	−1	0	
Ускорение		0	1	−2	0	
Угловое ускорение		0	0	−2	0	
Момент инерции		1	2	0	0	
Количество движения		1	1	−1	0	
Момент количества движения		1	2	−1	0	
Сила		1	1	−2	0	дин
Давление		1	−1	−2	0	бар
Вращательный момент		1	2	−2	0	
Работа, энергия	AW	1	2	−2	0	эрг
Мощность	P	1	2	−3	0	
Модуль упругости		1	−1	−2	0	
Капил. пост.		1	0	−2	0	
Коэфициент внутр. трен.		1	−1	−1	0	
Коэфициент сжатия		−1	1	2	0	
Количество тепла						
тепловые един.		1	0	0	1	калория
Механ. един.		1	2	−2	0	
Коэфициент расш.		0	0	0	−1	
Теплопроводность						
тепловые единицы		1	−1	−1	0	
Механические единицы		1	1	−3	−1	
Энтропия						
тепловые единицы		1	0	0	0	
Механические единицы		1	2	−2	−1	

Величина	Символ	I. Электрост				II. Электромагн				$\frac{II}{I}$ [1]	III. Междунар. абсолютн. [2]				IV. Междунар. практические единицы	$\frac{III_3}{I}$	$\frac{III_3}{II}$	$\frac{IV}{III}$
		x (m)	y (l)	z (t)	v (s)	x (m)	y (l)	z (t)	v (μ)		x (r)	y (l)	z (t)	v (f)				
Колич. электрич.	Q	1/2	3/2	—1	1/2	1/2	1/2	0	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	0	1	Кулон (C)	$3 \cdot 10^{9}$	10^{-1}	10 000
															Ампер-час (Ah)	$10{,}8 \cdot 10^{13}$	360	3 600
Электрич. смещ.	D	1/2	—1/2	—1	1/2	1/2	—3/2	0	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	—2	1				
Поверх. пл. элек	D	1/2	—1/2	—1	1/2	1/2	—3/2	0	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0		—2	1				
Напр. элек. поля		1/2	—1/2	—1	—1/2	1/2	1/2	—2	1/2	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1		—1	0				
Электр. потенц.		1/2	1/2	—1	—1/2	1/2	3/2	—2	1/2	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1	1	0	0				
Электродв. сила	E	1/2	1/2	—1	—1/2	1/2	3/2	—2	1/2	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1	1	0	0	Вольт (V)	$3^{-1} \cdot 10^{-2}$	10^{8}	1,0005
Емкость	C	0	1	0	1	0	—1		—1	$9 \cdot 10^{20}$	—1		0	1	Фарада (F)	$9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}	0,9995
															Микрофарада μF	$9 \cdot 10^{5}$	10^{-15}	0,9995
Диэлектр. пост.	ε	0	0	0	1	0	—2	2	—1	$9 \cdot 10^{20}$	—1	0	—1	1				
Сила тока	I	1/2	3/2	—2	1/2	1/2	1/2	—1	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	0	0	Ампер (A)[6]	$3 \cdot 10^{9}$	10^{-1}	1,0000
Электр. провод.	G	0	1	—1	1	0	—1	1	—1	$9 \cdot 10^{20}$	—1	0	0	0				
Сопротивление	R	0	—1	1	—1	0	1	—1	1	$9^{-1} \cdot 10^{-20}$	1	0	0	0	Ом (O, Ω)[4]	$9^{-1} \cdot 10^{-11}$	10^{9}	1,0005
Колич. магнет.	M	1/2	1/2	0	—1/2	1/2	3/2	—1	1/2	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1	1	0	1				
Напр. магн. поля	H	1/2	1/2	—2	1/2	1/2	—1/2	—1	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	—1	0	Гаусс[5]	$3 \cdot 10^{10}$	1	
Поток магн. инд.	Φ	1/2	1/2	0	—1/2	1/2	3/2	—1	1/2	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1	1	0	1	Максвелл [5]	$3^{-1} \cdot 10^{-10}$	1	
Магн. прониц.	μ	0	—2	2	—1	0	0	0	1	$9^{-1} \cdot 10^{-20}$	1	0	—1	1				
Магн. потенциал		1/2	3/2	—2	1/2	1/2	1/2	—1	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	0	0				
Магнитодв. сила		1/2	3/2	—2	1/2	1/2	1/2	—1	—1/2	$3 \cdot 10^{10}$	0	1	0	0				
															Ампер-обор.[5]	$12\pi \cdot 10^{9}$	$4\pi \cdot 10^{-1}$	
Магнит. сопрот.	S	0	1	—2	1	0	—1	0	—1	$9 \cdot 10^{20}$	—1	0	0	—1		$9 \cdot 10^{20}$	1	
Самоиндукция	L	0	—1	2	—1	0	1	0	1	$9^{-1} \cdot 10^{-20}$	1	0	0	1	Генри (H)			
Взаимная индук.	M	0	—1	2	—1	0	1	0	1		1	0	0	1		$9^{-1} \cdot 10^{-11}$	10^{9}	1,0005
Мощ. элек. тока	P	1	2	—3	0	1	2	—3	0	1	1	2	0	0	Ватт (W)	10^{7}	10^{7}	1,0005
Энергия эл. тока	W	1	2	—2	0	1	2	—2	0	1	1	2	0	1	Джоуль (J)	10^{7}	10^{7}	1,0005
															Ватт-час (Wh)	$3{,}6 \cdot 10^{10}$	$3{,}6 \cdot 10^{10}$	1,0005

[1]) Скорость света принята равной 3×10^{10}.
[2]) Международные абсолютные единицы имеют те же названия, что и международные практические с прибавкой абс: абскулон, абсампер и т. д.
[3]) Отношения электрических практических единиц к электростатическим (IV/I) и электромагнитным (IV/II) — приближенные.
[4]) За международный *ом* принято сопротивление ртутного столба при 0° длиной 106,3 *см*, масса которого равна 14,4521 *г*.
[5]) Названия гаусс, максвелл и ампер-оборот относятся к международным абсолютным единицам.
[6]) За международный ампер принята сила тока, выделяющая из водного раствора азотнокислого серебра в одну секунду 0,00111 800 *г* серебра

§ 6. Светотехнические единицы

1 международная свеча = 1,115 ед. Гефнера.
1 ед. Гефнера = 0,885 междун. свечи.
1 свеча испускает $4\pi = 12{,}57$ люмена.
1 люкс — освещенность, производимая точечным источником, равным одной свече на расстоянии 1 *м*, или освещенность, получающаяся на площади 1 $м^2$ при падении на нее равномерно распределенного светового потока в 1 люмен.
1 фот = 1 люмен на 1 $см^2$ = 10 000 люксов (1 ламберт = 1 люмен, испускаемый 1 $см^2$ идеально рассеивающей поверхности).
1 стильб — яркость равномерно во всех точках светящейся поверхности, дающей по нормали силу света в 1 международную свечу с 1 $см^2$ площади.
1 ватт соответствует 620 люменам монохроматического потока лучистой энергии при длине волны 556 $m\mu$.

§ 7. Акустические единицы

1 бар — единица акустического (звукового) давления, равен одной дине на $см^2$.

$\frac{1 \text{ ватт}}{см^2} = 10^7 \frac{эрг}{см^2/сек}$ — единица интенсивности звука.

1 ватт — единица акустической мощности $= 10^7 \frac{эрг}{сек}$.

1 децибел — единица уровня громкости (1 *дц*).
$I = I_0 10^{0{,}1s}$ s — интенсивность звука; I_0 — интенсивность на пороге слышимости или

$$s = 10 \ln \left(\frac{I}{I_0}\right).$$

1 непер — единица пространственного затухания, единица уровня громкости

$$1 \text{ } дц = 0{,}115 \text{ } неп.$$

1 единица акустического (волнового) сопротивления (W)
гр. сек$^{-1}$ *см*$^{-2}$ или *дин. сек. см*$^{-3}$

$$\xi' = \frac{p}{W}$$

p — акустическое давление, ξ' — скорость смещения.

§ 8. Некоторые технические постоянные и величины

1 техн. атмосфера $= 1 \frac{кг}{см^2} = 980\,665$ баров $= 0{,}96783$ атмосферы $=$
$= 735{,}56$ *мм* ртутного столба.

1 техн. единица массы = 9,80665 *кг*.
1 джоуль = 10^7 эргов = 0,101972 *кгм* = 0,23912 *кл*.
1 *кгм* = 9,80665 *дж*.
1 киловатт-час = $3{,}60 \times 10^6$ *дж*. = 367099,2 *кгм*.
1 лошадиная сила (*л. с.*) = 75 *кгм/сек* = 735,499 ватт.
1 калория (20° С) = $4{,}182 \times 10^7$ эргов; 1 килокалория (20° С) = 426,4 *кгм*.
Абсолютный нуль Кельвина — 273°,1.
Механический эквивалент тепла — 427,0 *кгм*.
Термический эквивалент работы — 0,002341 *г. кал*.
Абсолютная температура $T = 273°{,}1 + t°$ С.
Длина морской мили (1′ дуги меридиана) $\Delta = 1852{,}01$ *м* — $9{,}30 \cos 2\varphi$ *м*;
(размеры земли по Бесселю).

Предельный угол преломления света в воде 48°,3.
Предельный угол падения звукового луча (полное отражение от поверхности воды) 13°,4.
Скорость звука в воде (теоретическая формула)

$$V=\sqrt{\frac{\gamma}{\delta k}}.$$

V — скорость звука.

$\gamma=\frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкости воды при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

δ — плотность воды.

k — истинный коэфициент сжимаемости.

Эмпирические формулы (скорость звука в воде)

$V=1450+4{,}206\ t-0{,}0366\ t^2+1{,}137\,(S-35)$ формула Wood
$V=1445+4{,}46\ t-0{,}0615\ t^2+(1{,}2-0{,}015\ t)(S-35)$ формула Maurer
t — температура.
S — соленость в $^0/_{00}$.

§ 9. Точные соотношения между русскими и метрическими мерами

(Техническая энциклопедия. Справочник, 1927 г.)

А. Меры веса

Русские меры	Метрические меры
1 пуд = 40 фунт.	0,016 380 496$_4$ *т*
1 пуд	16,380 496 4 *кг*
1 фунт = 32 лота = 96 зол	0,409 512 41 *кг*
1 лот = 3 золотн.	12,797 268 8 *г*
1 золотник = 96 долей	4,265 754 27 *г*
1 доля	44,434 940 3 *мг*

Метрические меры	Русские меры
1 тонна = 1000 *кг*	61,048 211$_0$ п.
1 килограмм	0,061 048 211$_0$ п.
1 килограмм	2,441 928 44 фн.
1 грамм	0,078 141 710 л.
1 грамм	0,234 425 130 з.
1 миллиграмм	0,022 504 812$_5$ дл.

Б. Меры линейные

Русские меры	Метрические меры
1 верста = 500 с.	1,066 800 *км*
1 сажень = 3 арш. = 7 фут.	2,133 600 *м*
1 аршин = 16 верш.	0,711 200 *м*
1 аршин = 28 дюйм.	71,120 *см*
1 аршин	711,200 *мм*
1 вершок	4,445 00 *см*
1 вершок	44,450 0 *мм*
1 фут = 12 дюйм.	0,304 800$_0$ *м*
1 фут	30,480 0$_0$ *см*
1 дюйм = 10 линиям	2,540 00$_0$ *см*
1 дюйм	25,400 00 *мм*
1 сотая сажени (сотка)	2,133 600 *см*
1 линия = 10 точкам	2,540 000 *мм*
1 точка	0,254 000 *мм*

Метрические меры	Русские меры
1 километр	0,937 382 8 врс.
1 метр	0,468 691 4 с.
1 метр	1,406 07 а.
1 метр	22,497 1_9 врш.
1 метр	3,280 840 фт.
1 метр	39,370 0_8 дм.
1 дециметр	2,249 71_9 врш.
1 дециметр	3,937 00_8 дм.
1 сантиметр	0,224 971_9 врш.
1 сантиметр	0,393 700_8 дм.
1 сантиметр	0,468 691_4 ст. (сотка)
1 миллиметр	0,022 497 1_9 врш.
1 миллиметр	0,039 370 0_8 дм.
1 миллиметр	0,393 700_8 лн.
1 миллиметр	3,937 00_8 тч.

В. Меры квадратные

Русские меры	Метрические меры
1 кв. верста	1,138 06_2 *км²*
1 кв. верста	113,806_2 *га*
1 десятина	0,010 925 4_0 *км²*
1 десятина	1,092 54_0 *га*
1 десятина	10925,4_0 *м²*
1 кв. сажень	4,552 24_0 *м²*
1 кв. аршин	0,505 805_4 *м²*
1 кв. вершок	19,758 0_3 *см²*
1 кв. фут	0,092 903 04 *м²*
1 кв. фут	929,030_4 *см²*
1 кв. дюйм	6,451 60_0 *см²*
1 кв. линия	6,451 60_0 *мм²*

Метрические меры	Русские меры
1 кв. километр	0,878 686_6 кв. врс.
1 кв. километр	91,529 8_5 дес.
1 гектар	0,915 298_5 дес.
1 гектар	2196,71_6 кв. с.
1 ар	21,967 1_6 кв. с.
1 кв. метр	0,219 671_6 кв. с.
1 кв. метр	1,977 04_8 кв. а.
1 кв. метр	10,763 9_1 кв. фт.
1 кв. дециметр	5,061 23_5 кв. врш.
1 кв. дециметр	15,500 0_8 кв. дм.
1 кв. сантиметр	0,050 612 3_5 кв. врш.
1 кв. сантиметр	0,155 000_3 кв. дм.
1 кв. миллиметр	0,000 506 123_5 кв. врш.
1 кв. миллиметр	0,155 000_3 кв. лн.

Г. Меры кубические

Русские меры	Метрические меры
1 куб. сажень	9,712 6_8 *м³*
1 куб. аршин	0,359 72_9 *м³*
1 куб. вершок	87,824_4 *см³*
1 куб. фут	0,028 316_8 *м³*
1 куб. фут	28,316_8 *дм³*
1 куб. дюйм	16,387 0_6 *см³*

Метрические меры	Русские меры
1 куб. метр	0,102 958$_3$ куб.с.
1 куб. метр	2,779 87$_2$ куб. а.
1 куб. метр	35,314 6$_7$ куб.фт.
1 куб. дециметр	0,002 779 87$_2$ куб. а.
1 куб. дециметр	0,035 314 6$_7$ куб. фт.
1 куб. дециметр	11,386 3$_5$ куб. врш.
1 куб. сантиметр	0,011 386 3$_5$ куб. врш.
1 куб. сантиметр	0,061 023 7$_4$ куб. дм.
1 куб. миллиметр	0,000 011 386 3$_5$ куб. врш.
1 куб. миллиметр	0,000 061 023 7$_4$ куб. дм.

Д. Меры объема жидкостей

Русские меры	Метрические меры
1 ведро = 10 штофам = 20 бутылкам	12,299 4$_1$ *л*
1 штоф = 10 чаркам	1,229 94$_1$ *л*
1 бутылка = $\frac{1}{20}$ ведра	0,614 970$_3$ *л*
1 чарка	0,122 994$_1$ *л* = 122,994$_1$ *см*^{3}

Метрические меры	Русские меры
1 литр	0,081 304 7$_4$ ведра
1 литр	0,813 047$_4$ штофа
1 литр	1,626 09$_5$ бутылки
1 литр	8,130 47$_4$ чарки
1 куб. сантилитр	0,081 304 7$_4$ сотой доли ведра (чарки)

Е. Меры объема сыпучих тел

Русские меры	Метрические меры
1 четверть = 2 осьминам	2,099 09$_9$ *гл*
1 четверть = 8 четверикам	209,909$_9$ *л*
1 четверик = 8 гарнцам	26,238 7$_3$ *л*
1 гарнец	3,279 84$_2$ *л*

Метрические меры	Русские меры
1 гектолитр	0,476 395$_0$ четверти
1 литр	0,004 763 95$_0$ четверти
1 литр	0,038 111 6$_0$ четверика
1 литр	0,304 892$_8$ гарнца.

Примечание. Приведенные здесь соотношения между русскими и метрическими мерами основаны на законе от 4 июня 1899 г.

§ 10. Английские меры длины, веса и жидкостей

А. Меры длины

Ярд (Yard imperial standart) делится на 3 фута (Feet) по 12 дюймов (inches); дюйм — на 12 линий, хотя обыкновенно дюйм делится на 10 частей.

Сажень (Fathom) равна двум ярдам или 6 англ. футам.

Фурлонг (Furlong) равен 220 фут. — межевая или путевая мера.

Статутная (государственная указная) миля (statute mile) равна 8 фурлонгам = 1760 ярдам = 5280 фут.

Б. Меры веса

Имеется две системы весовых мер: тройская и торговая (avoirdupoid). Первый вес употребляется при взвешивании драгоценных металлов, а второй — в торговле.

1. Тройский фунт (указный, Imperial standart troy pound) делится на 12 унций (ounce) или на 240 весовых пенни (penni weig) по 24 грана, т. е. тройский фунт равен 5760 гранам.

Для медицинского или аптекарского употребления тройский фунт делится, как в прежнее время было в России, на 12 унций (uncia) по 8 драхм (drachma); драхма делится на 3 скрупула по 20 гранов, т. е. аптекарский гран был равен тройскому грану = 0,064799 грамма.

2. Торговый фунт (авуардюпуа, Imperial standart avoirdupois pound) содержит 16 унций по 16 драхм; драхма = 3 скрупулам (skrupel) = 30 гранам, т. е. торговый фунт = 7680 гранам; он обозначается (*lb*).

Высшие меры

14 фунтов = 1 стону (stone)
2 стона = 1 квартеру (quarter)
4 квартера = 1 центнеру (hundred) (*cwt*)
20 центнеров = 1 тонне (ton),
т. е. 1 тонна содержит 2240 фунтов
или 1 центнер „ 112 фунтов.

В. Меры жидкостей (и сыпучих тел)

Галлон (Imperial standart Gallon) вмещает в себе 10 фунт. (*lbs*) дистиллированной воды при температуре 62° F ($16^2/_3$° C) в воздухе при давлении атмосферы 30 англ. дюймов.

Галлон содержит 4 кварты (quart)
1 кварта „ 2 пинты (pint)
Меры большие чем галлон различны для жидкостей и сыпучих тел.

§ 11. Приближенные соотношения между английскими и метрическими мерами

А. Меры длины

1 дюйм (Inch)	= 25,399 *мм*	1 *см*	= 0,3937 дюйма
1 фут (Feet)	= 30,47997 *см* *)	1 метр	= 3,28089 фута
1 ярд (Yard)	= 91,43992 *см*	1 метр	= 0,546 саж.
1 сажень (Fathom)	= 1,8288 *м*	1 метр	= 1,0936 ярда
1 миля (statute mile)	= 1,609315 *км*	1 *км*	= 0,6214 ст. мили.

Б. Меры веса

1 гран	= 64,799 *мг*	1 грамм	= 0,035 унции
1 унция (Ounce)	= 28,350 *г*	1 *кг*	= 2,2046 фунта (*lbs*)
1 фунт (pound, *lb*)	= 0,45359 *кг*	1 квинтал	= 1,97 центнера (*cwt*) (100 *кг*)
1 центнер (*cwt*) (112 *lbs*)	= 50,802 *кг*		
1 тонна (20 cwts, Ton)	= 1015,30 *кг*	1 англ. тонна	= 0,984 метр. тонны (10 quintal).
1 тройский фунт	= 0,37324 *кг*		

В. Меры жидкостей

1 пинта (Pint)	= 0,5679 *л* $\approx \frac{4}{7}$ *л*	1 литр $\approx 1^3/_4$ пинты
1 кварта (Quart)	= 1,1359 *л* $\approx 1\frac{1}{7}$ *л*	1 литр $\approx {}^7/_8$ кварты
1 галлон (Gallon)	= 4,5435 *л* $\approx 4\frac{4}{7}$ *л*	1 литр $\approx {}^7/_{32}$ галлона.

*) Техническая энциклопедия. Справочник. Том I, стр. 18.

Г. Морские меры

1 мор. миля = 1,15150 ст. мили = 1,8532 *км* = 6080 фут.
1 ст. миля = 0,86840 мор. мили (Ad. knot) = 1,6093 *км*.
1 *км* = 0,5396 мор. мили (Ad. knot) = 0,6214 ст. мили.

Примечания: 1. 1 узел (Admiralty knot) есть единица скорости. 1 миля (nautical mile) — единица расстояний.

2. Точные соотношения между английскими и метрическими мерами длины, установленные A. R. Clarke в его известной работе Comparition of the standarts of Length, были следующие:

1 ярд = 91,439 180 *см*
1 метр = 1,093 623 11 ярда = 39,370 432 дюйма.

§ 12. Коэфициенты линейного расширения

Формула $l_t = l_0(1 + at + bt^2 + ct^3)$

Элемент	Область температуры C°	$10^7 a$	$10^{10} b$
Алюминий	—78— 600	229	9
Железо	0— 750	117	4,7
Золото	0— 520	142	2,1
Медь	0— 625	161	4,0
Никель	0— 121	125	7,4
Платина	0—1000	88,7	1,32
Ртуть	0— 100	1820	(объемный коэфиц.)
Свинец	14— 94	273	7,4
Серебро	0— 875	183	4,8
Цинк	9— 96	274	23

§ 13. Распространение звука в различных средах

Материал	t°C	Скорость (*м/сек*)	Материал	t°C	Скорость (*м/сек*)
Гранит	—	3950	Олово	—	2500
Дерево	—	3300—5300	Песок	—	1400—2600
Железо	20	5000—5130	Платина	20	2700
Золото	20	1740	Свинец	—	1320
Инвар	—	4160	Серебро	20	2680
Латунь		3480—3620	Сталь		4900—5100
Лед	5	3160	Стекло		5000—6000
Медь	20	3560	Цинк		3700
Мрамор	—	3810	Шифер		4500

§ 14. Плотность ртути при разной температуре

Температура Цельсия	
—20°	13,6450
—10	,6202
0	,5955
+10	,5708
+20	,5462
+30	,5216
+40	,4971
+50	,4727

§ 15. Плотность различных твердых тел при комнатной температуре

Материал	Плотность	Материал	Плотность	Материал	Плотность
Алмаз	3,5—3,6	Изв. гашеная	1,15—1,25	Платина	21,3—21,6
Алюминий	2,7	Изв. цем. сух.	1,60—1,65	Полевой шпат	2,53—2,58
Алюм. бронза	7,7	Известняк	1,87—2,82	Порох	0,9—1,75
Антрацит	1,4—1,7	Инвар	7,9	Пробка	0,2—0,35
Асфальт	1,1—1,5	Каменная соль	2,28—2,41	Сало	0,92—0,94
Баббит	7,5—10,1	Каучук сырой	0,92—0,96	Сахар (белый)	1,61
Бетон	1,8—2,8	Кварц	2,5—2,8	Свинец	11,25—11,94
Брикет угольн.	1,25	Кирпич	1,4—2,0	Сера	1,93—2,07
Бронза	8,7—8,9	Кожа	0,86—1,02	Серебро	10,42—10,62
Бумага	0,7—1,2	Кокс	1,25—1,40	Слюда	2,6—3,2
Вар	1,07—1,10	Кость	1,7—2,0	Смола	1,07—1,10
Висмут литой	9,82	Кость слон.	1,83—1,92	Сталь	7,85—7,87
Воск	0,95—0,98	Кремень	2,6—2,8	Стекло крон.	2,4—2,8
Гипс обожжен.	1,81	Латунь	8,4—8,73	Стекло флинт.	2,9—5,9
Гипс сухой	0,97	Медь	8,30—8,95	Сурик свинцов.	8,6—9,1
Глина	1,5—2,6	Мел	1,8—2,6	Уголь древесн.	0,4
Гравий сухой	1,8—2,0	Мрамор	1,95—2,82	Уголь бурый	1,2—1,5
Гранит	2,26—2,27	Нафталин	1,15	Уголь каменн.	1,2—1,5
Графит	1,9—2,3	Нашатырь	1,5—1,6	Фарфор	2,25—2,5
Гуттаперча	0,96—0,99	Нейзильбер	8,4—8,7	Хлопок	1,51
Дерево	0,4—1,4	Никель	8,35—8,9	Цемент	1,25—2,3
Дуралюминий	2,6—2,8	Олово	7,2—7,5	Шелк	1,6
Железо	7,6—7,85	Парафин	0,87—0,91	Шерсть овечья	1,32
Жир (животн.)	0,92—0,94	Пемза	0,37—0,9	Шифер	2,65—2,7
Земля	1,3—2,0	Перекись марганца	5,0	Шлак	2,5—3,0
Золото	19,25—19,50	Песок сухой	1,20—1,65	Эбонит	1,15
Изв. обожж.	0,9—1,3	Песок сырой	1,90—2,05	Янтарь	1,0—1,1

§ 16. Упругие свойства твердых тел

Материал	E	N	σ	$K \cdot 10^6$	R_e	R
Алюминий	6300—7500	2300—2700	0,33	1,4	5	10—40
Дерево	400—1800					3—22
Железо кован.	20000—22000	7000—8500	0,28	0,6	20	40—60
Сталь	20000—22000	8000—8300	0,28	0,6	20—150	50—160
Стальн. струна						до 250
Инвар	14000	5600			50	78
Чугун серый	7500—13000	5000	0,23—0,27	1,3	6	12—13
Чугун белый	18000					
Золото	7000—9500	2600—3900	0,41	0,7		11
Латунь	8000—10000	2700—3700	0,3—0,4	1,0	до 13	10—50
Медь	10000—13000	3900—4800	0,34	0,8	0,5—20	16—45
Нейзильбер	11000	4000	0,37			
Никель	20000—22000	7800	0,30	0,6	9	50
Олово	4000—5500	1700	0,33	1,9		1,7—2,5
Свинец	1500—1700	5500	0,43	2,4		2
Серебро	7000—8000	2500—2900	0,37	1,0	15	29
Стекло	5000—8000	1800—3000	0,2—0,3	1,3—2,9		3—9
Цинк	8000—13000	4000	0,2—0,3	1,5—0,9		13—20

E — модуль Юнга в *кг/мм²*; N — модуль сдвига в *кг/мм²*; σ — коэфициент Пуассона; K — коэфициент всестороннего сжатия в *см²/кг*; R_e — предел упругости в *кг/мм²*; R — предел прочности в *кг/мм²*.

§ 17. Плотность растворов этилового спирта C_2H_6O при разной температуре

Весовые % C_2H_6O	Температура смеси C°				Весовые % C_2H_6O	Температура смеси C°			
	0°	10°	20°	30°		0°	10°	20°	30°
0	0,99988	0,99975	0,99831	0,99579	50	0,92940	0,92182	0,91400	0,90577
5	,99135	,99113	,98945	,98680	55	,91848	,91074	,90275	,89456
10	,98493	,98409	,98195	,97892	60	,90742	,89944	,89129	,88304
15	,97995	,97816	,97527	,97142	65	,89595	,88790	,87961	,87125
20	,97566	,97263	,96877	,96413	70	,88420	,87613	,86781	,85925
25	,97115	,96672	,96185	,95628	75	,87245	,86427	,85580	,84719
30	,96540	,95998	,95403	,94751	80	,86035	,85215	,84366	,83483
35	,95784	,95174	,94514	,93813	85	,84789	,83967	,83115	,82232
40	,94939	,94255	,93511	,92787	90	,83482	,82665	,81801	,80918
45	,93977	,93254	,92493	,91710	95	,82119	,81291	,80433	,79533
50	,92940	,92182	,91400	,90577	100	,80625	,79788	,78945	,78096

§ 18. Показатели преломления для линии *D*

1. Алмаз 2,419
2. Флинтглас:
   самый тяжелый 1,9
   тяжелый 1,75
   легкий 1,609
3. Кронгяас:
   тяжелый 1,615
   легкий 1,51
4. Сероуглерод 1,63
5. Исландский шпат:
   обыкн. луч 1,659
   необыкнов. луч 1,486
6. Кварц:
   обыкн. луч 1,5442
   необыкн. луч 1,5533
   плавленый 1,4584
7. Канадский бальзам 1,54
8. Плавиковый шпат 1,434
9. Этиловый спирт 1,363
10. Вода 1,333

Показатель преломления морской воды для линии *D*

$t°$ \ $S‰$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1,33401	1,33502	1,33601	1,33701	1,33800	1,33899	1,33999	1,34100	1,34200
5	391	489	586	683	780	877	974	071	169
10	370	466	561	656	751	846	941	036	131
15	339	434	527	620	714	807	900	1,33994	088
20	299	392	485	576	669	760	853	945	038
25	252	344	435	526	617	708	799	891	1,33982
30	196	287	378	468	558	648	739	829	920

Примечание. $S‰$ — солепость в промилле.

§ 19. Показатели постоянные для оптической системы нормального человеческого глаза

Показатели преломления:

роговицы 1,376
водянистой влаги 1,336
хрусталика (возрастает от поверхности к ядру) . . . . . 1,386—1,404
стекловидного тела 1,336

Диаметр зрачка — приблизительно от 2 *мм* днем до 8 *мм* ночью. Наименьший диаметр светочувствительных элементов (в центральной ямке желтого пятна сетчатки) около 5 μ = 0,005 *мм*.

Для среднего нормального глаза по Гулльстранду (Gullstrand) в миллиметрах:

Расстояния от передней вершины роговицы:

до I главной точки	1,348 (1,772)
до II главной точки	1,602 (2,086)
до I узловой точки	7,078 (6,533)
до II узловой точки	7,332 (6,847)
до I (переднего) фокуса	— 15,707 (— 12,397)
до II (заднего) фокуса	24,387 (21,016)
до центра зрачка, т. е. до передней вершины хрусталика	3,6 (3,2)
до центра зрачка входа	3,047 (2,668)
до центра зрачка выхода	3,667 (3,212)
до центра вращения глазного яблока	13 (13)
до центральной ямки желтого пятна сетчатки, т. е. „длина глаза“	24 (24)

Фокусные расстояния:

первое (переднее)	— 17,055 (— 14,169)
второе (заднее)	22,785 (18,930)

Радиусы:

передней поверхности роговицы	7,7 (7,7)
задней поверхности роговицы	6,8 (6,8)
передней поверхности хрусталика	10 (5,33)
задней поверхности хрусталика	— 6 (— 5,33)

Первые числа соответствуют неаккомодированному глазу; числа в скобках — глазу, аккомодированному на точку, удаленную на 102,3 *мм* от передней вершины роговицы, что близко к наибольшей аккомодации в возрасте 20—25 лет.

Расстояние от передней главной точки глаза до „ближней точки“ изменяется от 7 до 40 *см* с изменением возраста от 10 до 50 лет. Расстояние до „дальней точки“ до 50 лет остается равным ∞ для нормального глаза. В 60 лет дальняя точка — в 2 *м* от глаза позади головы.

Расстояние наилучшего видения, т. е. расстояние, на которое глаз может длительно аккомодироваться без утомления, в среднем равно 25 *см*.

§ 20. Спектр колебаний

1. Переменный электрический ток промышленной частоты $f = 50$ *гц*.

2. Акустические (звуковые) колебания, воспринимаемые человеческим ухом, имеют частоты от $f = 16$ *гц* до $f = 16$—20 *кгц*.

3. Ультраакустические колебания (не слышимые человеческим ухом) имеют частоты $f > 16$—20 *кгц*.

4. Радиотехнические колебания условно начинаются с частоты $f = 10$ *кгц* ($\lambda = 30\,000$ *м*) и захватывают область более высоких частот или, соответственно, более коротких длин волн.

Отдельные диапазоны радиотехнических колебаний носят следующие наименования и выражаются следующими частотами (длинами волн) (ОСТ 7768):

Наименование диапазона	Длины волн λ (*м*)	Частоты f (*гц*)
Длинные волны	> 3000	$< 10^5$
Средние волны	3000—200	10^5—$1{,}5 \cdot 10^6$
Промежуточные волны	200— 50	$1{,}5 \cdot 10^6$—$6 \cdot 10^6$
Короткие волны	50— 10	$6 \cdot 10^6$—$3 \cdot 10^7$
Ультракороткие волны	10—0,01	$3 \cdot 10^7$—$3 \cdot 10^{10}$
а) метровые	10—1,0	$3 \cdot 10^7$—$3 \cdot 10^8$
б) дециметровые	1,0—0,1	$3 \cdot 10^8$—$3 \cdot 10^9$
в) сантиметровые	0,1—0,01	$3 \cdot 10^9$—$3 \cdot 10^{10}$

5. Тепловые (инфракрасные — ИК) лучи имеют частоты f от $0{,}75 \cdot 10^{12}$ до $3{,}94 \cdot 10^{14}$ *гц*, длины волн λ от 0,4 *мм* (400 μ) до 0,76 μ.

6. Видимые (световые) лучи имеют частоты f от $3{,}94 \cdot 10^{14}$ до $7{,}5 \cdot 10^{14}$ *гц*, длины волн λ от 0,76 до 0,4 μ.

7. Ультрафиолетовые (УФ) лучи имеют частоты f от $7{,}5 \cdot 10^{14}$ до $25 \cdot 10^{14}$ *гц*, длины волн λ от 0,4 до 0,12 μ.

8. Область между ультрафиолетовыми лучами и лучами Рентгена имеет частоты f от $0{,}25 \cdot 10^{16}$ до $6 \cdot 10^{16}$ *гц*, длины волн λ от 0,12 μ до 50 $\mathring{A}$.

9. Лучи Рентгена (граничные, мягкие, жесткие) имеют частоты от $6 \cdot 10^{16}$ до $7{,}5 \cdot 10^{19}$ *гц*, длины волн от 50 $\mathring{A}$ до 40 X.

10. Гамма-лучи радия имеют частоты около $1{,}5 \cdot 10^{21}$ *гц*, длины волн около 0,002 $\mathring{A} = 2X$.

11. Космические лучи имеют частоты от $3 \cdot 10^{21}$ *гц* и выше, длины волн от 1 X и короче.

§ 21. Единицы длин волн

Метр $(м) = 10^{3}$ *мм* $= 10^{2}$ *см*.
Сантиметр $(см) = 10$ *мм* $= 10^{-2}$ *м*.
Миллиметр $(мм) = 10^{-1}$ *см* $= 10^{-3}$ *м*.
Микрон $(\mu) = 10^{-3}$ *мм* $= 10^{-4}$ *см* $= 10^{-6}$ *м*.
Миллимикрон $(m\mu) = 10^{-3}$ $\mu = 10^{-6}$ *мм* $= 10^{-7}$ *см* $= 10^{-9}$ *м*.
Онгстрем $(\mathring{A}) = 10^{-1}$ $m\mu = 10^{-4}$ $\mu = 10^{-7}$ *мм* $= 10^{-8}$ *см* $= 10^{-10}$ *м*.
Икс $(X) = 10^{-4}$ $m\mu = 10^{-7}$ $\mu = 10^{-10}$ *мм* $= 10^{-11}$ *см* $= 10^{-13}$ *м*.

§ 22. Длины волн главных фраунгоферовых линий

Обозначения линии	Элемент	Длина волны в $\mathring{A}$	Обозначения линии	Элемент	Длина волны в $\mathring{A}$
A	Кислород	7621,0	c	Железо	4957,6
a	»	7185,0	F	Водород	4861,3
B	»	6870,0	d	Железо	4668,0
C	Водород	6562,8	e	»	4383,6
α	Кислород	6278,1	f	Водород	4340,5
D_1	Натрий	5895,9	G'	Железо	4325,8
D_2	»	5890,0	G	Железо, кальций	4307,9
D_3	Гелий	5875,6			
E	Железо	5269,6	g	Кальций	4226,7
b_1	Магний	5183,6	h	Водород	4101,7
b_2	»	5172,7	H	Кальций	3968,6
b_3	Железо	5169,0	K		3933,6
b_4	Железо, магний	5167,4			

§ 23. Постоянные величины в метеорологии

1. Плотность воздуха $D = 0{,}001293$ *г/см*^{3} при $t = 0°$, $p = 760$ *мм* (см. стр. 348, более подробная таблица).

2. Плотность водяного пара $D_n = 0{,}623$ $D \approx \frac{5}{8}$ D.

3. Вес 1 *м*^{3} воздуха $S = 1{,}29307$ *кг* при $h = 0$, $t = 0°$, $p = 760$ *мм*.

4. Удельный объем воздуха $v = 773{,}4$ *см*^{3}/*г* $\approx \frac{3}{4}$ литра.

5. Давление воздуха на 1 *см*^{2} $= 1033{,}3$ *г* $= 1\,013\,226$ дин.

6. Нормальное барометрическое давление $p = 760$ *мм* $= 1013{,}23$ *мб* при $t = 0°$, $\varphi = 45°$.

7. Бар $= 1\,000\,000$ *дин/см*^{2} $= 750{,}06$ *мм*; 760 *мм* $= 1{,}013252$ *б*.

8. Миллибар (*мб*) = 0,75 *мм* = 10^3 *дин/см*^{2} ($^3/_4$ *мм*).
9. Миллиметр (*мм*) = 1,333 *мб* = ($^4/_3$ *мб*).
10. Высота однородной атмосферы $H_0 = 7991$ *м*.
11. Барометрическая постоянная $B_0 = H \ln 10 = 18401{,}2$ *м*.
12. Барометрическая ступень

мб	1020	1000	900	800	700	
м	7,8	8,0	8,9	10,0	11,4	
мм	780	770	760	750	740	730	720
м	10,24	10,38	10,52	10,66	10,80	10,94	11,10

13. Виртуальная температура влажного воздуха, имеющего температуру T (абсолютн.) и удельную влажность q

$$T_v = T(1 + 0{,}605\, q).$$

14. Потенциальная температура $\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0{,}2884} = kT$ при атмосферном давлении p.
15. Теплоемкость воздуха
$C_p = 0{,}2396$*) *кал/г* при пост. давлении.
$C_v = 0{,}1707$ *кал/г* при пост. объеме.
16. Теплопроводность (внутренняя) воздуха $k = 0{,}00005$.
17. Солнечная постоянная — 1,94 *г кал/см*^{2} *мин* = $1{,}35 \cdot 10^6$ *э/см*^{2} *сек*.
18. Излучение земли $E = 8{,}26 \cdot 10^{-11}\ (273 + t)^4$ *кал/см мин*.
19. Универсальная газовая постоянная $R = 287{,}04$ *м*^{2}*/сек*^{2} *град*.
20. Температурный вертикальный адиабатический градиент
сухого воздуха $\gamma = 1°$ на 100 *м*.
влажн. „ $\gamma_1 = 0{,}65$ на 100 *м*, при $t = 0°$, $p = 1000$ *мб*.
21. Скрытая теплота парообразования воды $r = 606{,}5 - 0{,}305\, t$ *кал/г*.
22. Скрытая теплота плавления льда $r_1 = 79{,}7$ *кал/г*.
23. Теплоемкость морской воды (при $t = 0°$, $S = 35\,^0/_{00}$) $C = 0{,}941$ *кал/г*.
24. Теплоемкость пресного льда $c = 0{,}48$ *кал/г* при t от —2° до — 10°.
25. Барический градиент давления (G) = изменению давления на 1° дуги меридиана (111 *км*) по нормали к изобаре в сторону убывания давления.
26. Горизонтальный температурный градиент = изменению температуры на 1° дуги меридиана (111 *км*) по нормали к изотерме в сторону падения температуры.
27. Скорость геострофич. ветра $V = \frac{4{,}78}{\sin \varphi} G$ *м/сек* (G *бар*, град. в *мб*).
28. Изменение давления с высотой (формула Бабине)

$$h = 800\ \frac{2(p_0 - p_1)}{(p_0 + p_1)}(1 + 0{,}004\, t),$$

где h — разность высот 2 пунктов наблюдений, p_0 — давление на нижнем пункте; p_1 — на верхнем пункте, t — средняя температура.

§ 24. Плотность сухого воздуха D относительно воды при 4° С

Температура С°	H давление (*мм*)						
	720	730	740	750	760	770	780
0	0,001225	0,001242	0,001259	0,001276	0,001293	0,001310	0,001327
5	1203	1220	1236	1253	1270	1286	1303
10	1182	1198	1214	1231	1247	1264	1280
15	1161	1177	1193	1209	1226	1242	1258
20	1141	1157	1173	1189	1205	1220	1236
25	1122	1138	1153	1169	1184	1200	1216
30	1104	1119	1134	1149	1165	1180	1195

*) D. Brunt. Physical and dynamical Meteorology.

Плотность вычислена по формуле

$$D = \frac{0{,}001293}{1 + 0{,}00367t} \cdot \frac{H}{765}$$

Примечание. В случае необходимости табличные величины можно линейно интерполировать по вертикальному и горизонтальному направлениям.

§ 25. Плотность некоторых газов

Масса одного кубического дециметра (1000 *куб. см*) газа в граммах при 0° С и 760 *мм* давления, отнесенного к ускорению силы тяжести 980,6162

Наименование	Формула	Плотность	Наименование	Формула	Плотность
Азот	N_2	1,25051	Неон	Ne	0,89990
Аммиак	NH_3	0,7717	Озон	O_3	2,22
Аргон	Ar	1,78394	Окись азота	NO	1,3401
Ацетилен	C_2H_2	1,1709	Окись углерода	CO	1,25011
Водород	H_2	0,089870	Сероводород	H_2S	1,5393
Гелий	He	0,17846	Угольный ангидрид	CO_2	1,97686
Закись азота	N_2O	1,9780	Хлор	Cl_2	3,220
Кислород	O_2	1,42893	Этилен	C_2H_4	1,2604

§ 26. Плотность некоторых газов δ относительно воздуха при $t = 0°$ и 760 *мм*

Наименование	Формула	Плотность	Наименование	Формула	Плотность
Азот	N_2	0,96708	Неон	Ne	0,69594
Аммиак	NH_3	0,59680	Озон	O_3	1,72
Аргон	Ar	1,3796	Окись азота	NO	1,0364
Ацетилен	C_2H_2	0,90552	Окись углерода	CO	0,96678
Водород	H_2	0,06950	Сероводород	H_2S	1,1904
Гелий	He	0,13801	Угольный ангидрид	CO_2	1,52881
Закись азота	N_2O	1,5297	Хлор	Cl_2	2,49
Кислород	O_2	1,10507	Этилен	C_2H_4	0,97473

При вычислении этой таблицы принято, что масса 1000 *куб. см* воздуха при $t = 0°$ и 760 *мм* равна 1,29307 *г/см*^{3}.

§ 27. Упругость паров воды в *мм* ртутного столба

$t°$ С	Упруг.	$t°$ С	Упруг.	$t°$ С	Упруг.	$t°$ С	Упруг.	$t°$ С	Упруг.
−5°	3,16	0	4,579	10	9,209	20	17,535	30	31,824
−4	3,40	1	4,926	11	9,844	21	18,650	31	33,695
−3	3,67	2	5,294	12	10,518	22	19,827	32	35,663
−2	3,95	3	5,685	13	11,231	23	21,068	33	37,729
−1	4,26	4	6,101	14	11,987	24	22,377	34	39,898
0	4,579	5	6,543	15	12,788	25	23,756	35	42,175
		6	7,013	16	13,634	26	25,209	36	44,563
		7	7,513	17	14,530	27	26,739	37	47,067
		8	8,045	18	15,477	28	28,349	38	49,692
		9	8,609	19	16,477	29	30,043	39	52,442
		10	9,209	20	17,535	30	31,824	40	55,324

§ 28. Упругость паров воды над льдом в *мм*

$t°$ C	Упруг.	$t°$ C	Упруг.
— 65	0,002	— 20	0,772
— 60	0,007	— 15	1,238
— 55	0,015	— 10	1,946
— 50	0,029	— 8	2,321
— 45	0,052	— 6	2,761
— 40	0,093	— 5	3,008
— 35	0,167	— 4	3,276
— 30	0,280	— 3	3,566
— 25	0,471	— 2	3,879
— 20	0,772	— 1	4,216
		0	4,579

§ 29. Плотность воды

$S°/_{00}$ / $t°$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	$S°/_{00}$ / $t°$
0°	0,99987	1,00397	1,00801	1,01204	1,01607	1,02008	1,02410	1,02813	1,03216	0°
1	993	401	804	205	605	005	406	807	209	1
2	997	403	804	204	603	2001	400	799	200	2
3	999	404	803	201	598	1995	393	791	190	3
4	1,00000	403	801	197	593	988	384	781	179	4
5	0,99999	401	797	192	586	980	374	770	166	5
6	997	397	791	185	578	970	363	757	153	6
7	993	391	785	177	568	957	351	744	138	7
8	988	385	776	167	557	947	338	729	122	8
9	981	377	767	156	545	934	325	714	106	9
10	973	367	756	144	532	920	308	697	088	10
11	963	356	744	131	518	904	291	679	069	11
12	952	344	731	117	402	888	274	661	049	12
13	940	331	717	102	486	870	255	641	029	13
14	927	317	701	085	468	852	236	621	3007	14
15	99913	301	685	067	450	832	215	599	2985	15
16	99897	285	667	049	430	811	194	577	961	16
17	880	267	638	029	409	790	171	553	937	17
18	862	257	628	1008	388	767	148	529	912	18
19	843	248	608	00987	365	744	123	504	886	19
20	823	228	586	964	342	720	098	478	860	20
21	802	207	563	940	317	694	072	451	832	21
22	99780	185	539	916	292	668	045	424	804	22
23	756	162	514	890	265	641	2018	395	775	23
24	732	138	488	863	238	613	1989	366	745	24
25	0,99707	1,00087	1,00462	1,00836	1,01210	1,01585	1,01960	1,02336	1,02714	25

Примечание. $S°/_{00}$ — соленость в промилле. Плотность пресной воды согласно ОСТ 7283.

§ 30. Таблица скорости звука в воде (горизонтальная скорость)

$t°$ \ $S‰$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1399 1410	1406 1416	1413 1422	1419 1427	1426 1433	1432 1438	1439 1444	1445 1450	1452 1456
5	1423 1430	1429 1436	1436 1442	1442 1447	1448 1453	1455 1459	1461 1465	1467 1470	1474 1476
10	1444 1449	1450 1454	1456 1460	1462 1465	1469 1471	1475 1477	1481 1483	1487 1488	1493 1494
15	1463 1465	1469 1471	1475 1476	1481 1482	1487 1488	1492 1493	1498 1499	1504 1505	1510 1511
20	1480 1480	1485 1485	1491 1491	1497 1497	1502 1502	1508 1508	1513 1514	1519 1519	1524 1525
25	1493 1492	1499 1498	1505 1504	1510 1510	1516 1515	1521 1521	1526 1527	1532 1532	1537 1538

Верхние цифры дают теоретическую величину по формуле $V = \sqrt{\frac{\gamma}{\sigma\varrho}}$ см. стр. 339).

Нижние цифры дают величину скорости по эмпирической формуле Wood (см. стр. 339).

§ 31. Шкала горизонтальной видимости в море (днем)

Баллы	Характеристика	Предметы различимы до расстояния
0	Очень густой туман	1/4 кбт.
1	Густой туман	1 кбт.
2	Туман средней густоты	2 кбт.
3	Умеренный туман	5 кбт.
4	Слабый туман или дымка	1 миля
5	Плохая видимость (дымка, мгла)	2 мили
6	Посредственная видимость	5 миль
7	Хорошая видимость	10 миль
8	Очень хорошая видимость	30 миль
9	Исключительная видимость	Предметы различимы на расстоянии более 30 миль

§ 32. Длина (λ), скорость (c) и период (τ) трохоидальной волны

τ (сек)	λ (м)	c (м/сек)	τ (сек)	λ (м)	c (м/сек)	τ (сек)	λ (м)	c (м/сек)
1	1,6	1,6	7	77	10,9	14	306	21,9
2	6,2	3,1	8	100	12,5	16	396	25,0
3	14,1	4,7	9	126	14,1	18	506	28,1
4	25	6,2	10	156	15,6	20	624	31,2
5	39	7,8	11	189	17,2	22	762	34,3
6	56	9,4	12	225	18,7	24	899	37,5

$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$ (в секундах); $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ (метр в секунду);

$\lambda = \frac{g}{2\pi}\tau^2$ (в метрах); g ($м/сек^2$).

§ 33. Шкала силы ветра *)

Баллы	Словесная характеристика	Скорость в *м/сек*	Скорость в узлах	Давление в *кг/м²*	Признаки для оценки силы ветра	
					по действию на наземные предметы	по действию на поверхность моря (для открытой части моря)
0	Штиль	0—0,5	0—1,0	0	Дым поднимается вертикально или почти вертикально. Листья на деревьях неподвижны	Зеркально гладкое море
1	Тихий ветер	0,6—1,7	1,2—3,3	0,1	Ощущается легкое дуновение ветра. Дым не вертикален и по нему можно определить направление ветра. Листья на деревьях неподвижны. Движения флюгера незаметны	Отдельные то появляющиеся, то исчезающие пятна легчайшей ряби
2	Легкий ветер	1,8—3,3	3,5—6,4	0,5	Слегка колеблется вымпел, временами листья на деревьях, приводится в движение флюгер. Колеблются легкие флаги. Колышатся легкие ветки на деревьях	Легкая рябь пятнами
3	Слабый ветер	3,4—5,2	6,6—10,1	2	Колеблются легкие флаги. Колышатся легкие ветки с листьями	Поверхность моря тускнеет; маленькие короткие, чуть всплескивающиеся волны
4	Умеренный ветер	5,3—7,4	10,3—14,4	4	Вытягивается вымпел. Колеблются тонкие ветки без листьев. Поднимаются пыль и сухие листья	Гребни волн начинают опрокидываться, но образуют только стекловидную пену
5	Свежий ветер	7,5—9,8	14,6—19,0	6	Вытягиваются большие флаги. Колеблются тонкие стволы деревьев и большие ветки без листьев	Местами появляются барашки

*) Правила Гидрометеорологической службы № Г-1 (ПГМС № Г-1). Гидрометеоиздат, 1945 г. и Мореходные таблицы (МТ-43). ГУ ВМС.

Продолжение

Баллы	Словесная характеристика	Скорость в *м/сек*	Скорость в узлах	Давление в *кг/м²*	Признаки для оценки силы ветра	
					по действию на наземные предметы	по действию на поверхность моря (для открытой части моря)
6	Сильный ветер	9,9—12,4	19,2—24,1	11	Колеблются толстые сучья деревьев. У неподвижных предметов свист от ветра. Гудят телеграфные провода	Во многи местах образуются барашки
7	Крепкий ветер	12,5—15,2	24,3—29,5	17	Колеблются стволы небольших деревьев без листвы, гнутся большие ветви. При ходьбе против ветра чувствуется заметное сопротивление	Все море покрыто барашками
8	Очень крепкий ветер	15,3—18,2	29,7—35,4	25	Колеблются стволы больших деревьев, ломаются ветки, затруднено движение против ветра	Срываемая с гребней пена ложится полосами по ветру
9	Шторм	18,3—21,5	35,6—41,8	36	Ломаются большие голые сучья деревьев. Срываются дымовые трубы. Повреждаются и срываются крыши	Полосы пены ложатся тесными рядами по направлению ветра
10	Сильный шторм	21,6—25,1	42,0—48,8	47	Деревья вырываются с корнем. Значительные разрушения	Пена широкими плотными полосами ложится по ветру, поверхность моря становится белой
11	Жестокий шторм	25,2—29,0	49,0—56,0	64	Большие разрушения	Все море покрыто пеной, ветер, срывая гребни, несет водяную пыль, уменьшающую видимость
12	Ураган	более 29,0	более 56,0	более 74	Опустошения	

§ 34. Шкала волнения

Баллы волнения	Степень волнения	Примерная высота волн в *м**)	Характеристика состояния поверхности моря (признаки для определения степени волнения)
0	Штиль	—	Зеркально гладкое море
1	Спокойное (тихое) море	до 0,25	Образуются небольшие чешуеобразные волны (море покрывается рябью)
2	Легкое волнение	0,25—0,50	Короткие, хорошо выраженные волны; гребни начинают опрокидываться, но пена не белая, а стекловидная
3	Слабое волнение	0,50—0,75	Волны становятся длиннее, местами образуются пенящиеся барашки. Прибой сопровождается непродолжительным шумом
4	Умеренное волнение	0,75—1,25	Волны становятся длиннее. Все море покрывается барашками, шум прибоя становится сильнее и воспринимается как безостановочный рокот
5	Неспокойное море	1.25—2,00	Начинает образовываться крупная волна, белые пенистые гребни занимают большие поверхности. Прибой сопровождается глухими раскатами
6	Крупное волнение	2—3	Волны громоздятся и производят разрушения. Ветер срывает с гребней белую пену и стелет ее полосами по ветру. Шум прибоя слышен на значительном расстоянии
7	Сильное волнение	3—5	Высота и длина волн значительно увеличиваются. Пена барашков ложится по ветру более густыми полосами. Шум в открытом море приобретает характер раскатов
8	Жестокое волнение	5—10	Высокие гороподобные волны с длинными опрокидывающимися гребнями, от пены становится белой вся поверхность моря. Раскаты в открытом море усиливаются и приобретают характер толчков
9	Волнение исключительной силы	больше 10	Высота волн настолько велика, что находящиеся в поле зрения корабли временами скрываются за ними. Море покрыто белыми, вытянутыми по ветру полосами пены. Верхушки гребней срываются в виде водяной пыли. Раскаты в открытом море превращаются в сплошной грохот. Срываемая с гребней водяная пыль становится настолько густой, что значительно уменьшает видимость

*) Океанологические таблицы. Гидрометеоиздат, 1940 г. № 128.

§ 35. Перевод скоростей в узлах в скорости *см/сек* и обратно

Скорость в узлах	Скорость в *см/сек*
0,5	25,7
1	51,4
2	102,9
3	154,3
4	205,8
5	257,2
6	308,6
7	360,1
8	411,5
9	463,0
10	514,4

Скорость в *см/сек*	Скорость в узлах
1	0,0195
10	0,195
20	0,389
30	0,584
40	0,778
50	0,973
60	1,167
70	1,362
80	1,556
90	1,751
100	1,945

1 узел = 51,44 *см/сек*;
1 *см/сек* = 0,01945 узла.

Редактор *Н. А. Мамонтов.*
Технический редактор *Л. С. Ручкина.*

□

Сдано в набор 3/I 1945 г.
Подписано в печать 30/III 1948 г.
№ Г-94691. Изд. № 22/38. Зак. № 168.
Объем $22^5/_8$ печ. листов + 1 вклейка.

□

Набрано и сматрицировано во 2-й типографии ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" „Печатный двор" имени А. М. Горького. Ленинград. Гатчинская, 26.

□

Отпечатано с матриц во 2-й типолитографии Гидрометеоиздата. Прачечный, 6. Зак. № 1139.